ప్రవచనాలు - సమితులు

1. ప్రవచనం:

సత్యం కాని, అసత్యం కాని ఏదో ఒకటి మాత్రమే అయ్యే వాక్యాన్ని ప్రవచనం అంటారు. ప్రవచనాలను p, q, r, ...లతో సూచిస్తారు.

సత్యమైన ప్రవచన సత్య విలువ Tతో, అసత్యమైన దాని సత్య విలువను F తోనూ సూచిస్తారు.

2. వ్యతిరేక ప్రవచనం:

ఒక ప్రవచనానికి ''కాదు'' అనే పదాన్ని చేర్చితే అది వ్యతిరేక ప్రవచనం అవుతుంది. p ఒక ప్రవచనం అయితే వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని ~pతో సూచిస్తాం.

3. సంయోజకాలు:

1. మరియు ($\wedge$) 2. లేదా ($\vee$) 3. అయితే ($\rightarrow$)

4. అయినప్పుడే ($\leftrightarrow$)

4. సంయుక్త ప్రవచనాలు:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను సంయోజకాలను ఉపయోగించి కలిపి రాస్తే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాలను సంయుక్త ప్రవచనాలు అంటారు. అవి...

1. సముచ్ఛయం 2. వైకల్పికం 3. అనుషంగికం

4. ద్విముఖానుషంగికం

5. సముచ్ఛయం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''మరియు'' అనే సంయోజకంతో కలిపితే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనం. p, qలు రెండు ప్రవచనాలైతే వాటి సముచ్ఛయాన్ని $p \wedge q$తో సూచిస్తాం. p, qలు రెండు సత్యాలైతే $p \wedge q$ సత్యం అవుతుంది.

సముచ్ఛయ సత్య పట్టిక

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

6. వైకల్పికం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''లేదా'' అనే సంయోజకాన్ని ఉపయోగించి రాస్తే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాన్ని వైకల్పికం అంటారు. p,qలు రెండు ప్రవచనాలైతే దాని వైకల్పికాన్ని $p \vee q$తో సూచిస్తాం. p, qలు రెండు అసత్యాలు అయితే $p \vee q$ అసత్యం అవుతుంది.

వైకల్పిక సత్య పట్టిక

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

7. అనుషంగికం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''అయినచో'' అనే సంయోజకంతో కలిపితే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాన్ని అనుషంగికం అంటారు.

p, qలు రెండు ప్రవచనాలైతే.. దాని అనుషంగికంను $p \Rightarrow q$తో సూచిస్తాం.

p సత్యం qఅసత్యమైన $p \rightarrow q$ అసత్యమవుతుంది.

$p \rightarrow q$లో pను దత్తాంశం qను సారాంశం అంటారు.

అనుషంగిక సత్య పట్టిక

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

8. ద్విముఖానుషంగికం:

రెండు సరళ ప్రవచనాలను ''అయినప్పుడే'' అనే సంయోజకంతో కలిపితే ఏర్పడే నూతన ప్రవచనాన్ని ద్విముఖానుషంగికం అంటారు. p,qలు రెండు ప్రవచనాలైతే వాటి ద్విముఖానుషంగికాన్ని $p \leftrightarrow q$తో సూచిస్తారు.p, qలు రెండూ సత్యాలైతే లేదా రెండూ అసత్యాలైనా వాటి ద్విముఖానుషంగికం సత్య విలువ సత్యం అవుతుంది.

ద్విముఖానుషంగిక సత్య పట్టిక

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

9. పునరుక్తి:

ఒక సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్నీ Tలు ఉన్నట్లయితే అలాంటి ప్రవచనాన్ని పునరుక్తి అంటారు.

ఉదా: $p \vee (\sim p)$

10.విరోధాభాసం:

ఒక సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్నీ Fలు ఉన్నట్లయితే అట్టి ప్రవచనాన్ని విరోధాభాసం అంటారు. ఉదా: $p \wedge (\sim p)$

11.పరిమాపకాలు:

పరిమాపకాలు 2 రకాలు.

1. అస్థిత్వ పరిమాపకం ($\forall$) 2. సార్వత్రిక పరిమాపకం ($\exists$)

12.ప్రవచనం విపర్యయం, విలోమం, ప్రతివర్తితం

1. $p \Rightarrow q$ ఒక నియత ప్రవచనమైతే దాని విపర్యయం ; $q \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow q$ నియత ప్రవచనం విలోమం ; $\sim p \Rightarrow \sim q$
3. $p \Rightarrow q$ నియత ప్రవచనం ప్రతివర్తితం ; $\sim q \Rightarrow \sim p$

13.నిరూపణ పద్ధతులు:

ఇవి మూడు రకాలు.

1. ప్రత్యక్ష నిరూపణ 2. పరోక్ష నిరూపణ
3. ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా అసత్య నిరూపణ

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఒక నియత ప్రవచనం విపర్యయం దాని విలోమానికి తుల్యమని చూపించండి?

Sol:

$p \Rightarrow q$ ఒక ప్రవచనమైతే

$q \Rightarrow p \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$ అని చూపించాలి.

p	q	$q \Rightarrow p$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

$\therefore q \Rightarrow p \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$

2. $[p \wedge (\sim q)] \wedge [(\sim p) \vee q]$ ఒక విరోధాభాసమని చూపించండి?

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$(\sim p) \vee q$	$p \wedge (\sim q) \wedge (\sim p) \vee q$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F

పై సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్నీ Fలు ఉన్నాయి.

$\therefore [p \wedge (\sim q)] \wedge [(\sim p) \vee q]$ ఒక విరోధభాసం అవుతుంది.

3. $p \wedge (\sim q) \Rightarrow p$ పునరుక్తి అని చూపించండి?

Sol:

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$p \wedge (\sim q) \Rightarrow p$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

పై సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో అన్ని Tలు ఉన్నాయి. కాబట్టి $p \wedge (\sim q) \Rightarrow p$ ఒక పునరుక్తి అవుతుంది.

4. ప్రత్యక్ష నిరూపణ పద్ధతి అంటే ఏమిటి? x ఒక సరిసంఖ్య అయితే x^2 సరిసంఖ్య అవుతుందని చూపించండి?

Sol:

దత్తాంశంతో ప్రారంభించి, కొన్ని సోపానాలు ఏర్పరుస్తూ వాటికి కారణాలు వివరిస్తూ సారాంశాన్ని చేరే పద్ధతిని ప్రత్యక్ష నిరూపణ పద్ధతి అంటారు.

వరుస సంఖ్య	సోపానాలు	కారణాలు
1.	x సరిసంఖ్య	దత్తాంశం
2.	$x = 2K, K \in N$	సరిసంఖ్యల నిర్వచనం
3.	$x^2 = (2K)^2$ $x^2 = 4K^2$ $= 2(2K^2)$ $x^2 = 2L, L \in N$	ఇరువైపులా వర్గం చేస్తే $2K^2 = L$
4.	x^2 సరిసంఖ్య	సరిసంఖ్యల నిర్వచనం

రెండు మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ΔABCలో $AB > AC$ అయితే $\angle C > \angle B$నకు విపర్యయం, విలోమం, ప్రతివర్తితాలను రాయండి?

Sol:

ప్రవచనం: ΔABCలో $AB > AC$ అయితే $\angle C > \angle B$

విపర్యయం: ΔABCలో $\angle C > \angle B$ అయితే $AB > AC$

విలోమం: ΔABCలో $AB < AC$ అయితే $\angle C < \angle B$

ప్రతివర్తితం: ΔABCలో $\angle C < \angle B$ అయితే $AB < AC$

2. సముచ్ఛయాన్ని నిర్వచించి సత్య పట్టిక రాయండి?

3. వైకల్పికాన్ని నిర్వచించి సత్య పట్టిక రాయండి?

4. అనుషంగికం నిర్వచించి సత్య పట్టిక రాయండి?

5. పునరుక్తి, విరోధభాసాలను నిర్వచించండి?

(2 నుంచి 5 ప్రశ్నల సమాధానాలు మొదటి పేజీలో ఉన్నాయి.)

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\sim(\sim p) = p$ అని చూపించండి?

p	~p	~(~p)
T	F	T
F	T	F

∴ ~(~p) = p

2. 4 × 5 = 20 లేదా 4 ÷ 2 = 2 సత్య విలువ తెల్పండి?

Sol:

4 × 5 = 20 సత్య విలువ T

4 ÷ 2 = 2 సత్య విలువ T

∴ 4 × 5 = 20 లేదా 4 ÷ 2 = 2 సత్య విలువ T

3. 5 × 4 = 20 ⇒ 5 + 2 = 8 సత్య విలువ తెల్పండి?

Sol:

5 × 4 = 20 సత్య విలువ T

5 + 2 = 8 సత్య విలువ F

∴ 5 × 4 = 20 ⇒ 5 + 2 = 8 సత్య విలువ F

4. ''5 ఒక బేసి సంఖ్య ; 5 ధనాత్మకం'' అనే ప్రవచనాలకు వైకల్పికాన్ని రాయండి?

Sol:

p : 5 ఒక బేసి సంఖ్య

q : 5 ధనాత్మకం

వైకల్పికం $p \wedge q$: 5 ఒక బేసి సంఖ్య లేదా 5 ధనాత్మకం.

5. p, qలు ఏదైనా రెండు ప్రవచనాలైతే $p \vee (\sim q)$ అనే సంయుక్త ప్రవచనం సత్య పట్టిక రాయండి?

Sol:

p	q	~q	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

సమితులు

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశాలు

A, Bలు రెండు సమితులు, x మూలకమైతే

1. $A \cup B = \{x / x \in A$ లేదా $x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x / x \in A$ మరియు $x \in B\}$
3. $A - B = \{x / x \in A$ మరియు $x \notin B\}$
4. $B - A \{x / x \in B$ మరియు $x \notin A\}$
5. $A \subset B, B \subset A$ అయితే $A = B$ అవుతుంది.
6. $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A$ మరియు $x \notin B$
7. $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A$ లేదా $x \notin B$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. A,B,Cలు మూడు సమితులైతే $a \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ అని చూపించండి?

Sol:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ అని చూపించడానికి

1) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

2) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ అని చూపించాలి.

(1) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ మరియు $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ మరియు ($x \in B$ లేదా $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ మరియు $x \in B$) లేదా ($x \in A$ మరియు $x \in C$)

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ లేదా $x \in (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

∴ $A \cap (B \cup C)$లోని ప్రతి మూలకం $(A \cap B) \cup (A \cap C)$లో ఉంటుంది. కాబట్టి

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ _____ (1)

(2) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ లేదా $x \in (A \cap C)$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ మరియు $x \in B$) లేదా ($x \in A$ మరియు $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A$ మరియు ($x \in B$ లేదా $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A$ మరియు $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

∴ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$లోని ప్రతి మూలకం $A \cap (B \cup C)$లో ఉంటుంది.

∴ $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ _____ (2)

(1), (2)ల నుంచి $A \cap (B \cup C) =$

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ అవుతుంది.

2. మూలకోత్పత్తి ద్వారా A, B, Cలు మూడు సమితులైతే $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ అని చూపించండి?

Sol:

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ అని చూపించడానికి

1) $A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$

2) $(A - B) \cup (A - C) \subset A - (B \cap C)$ అని చూపించాలి.

(1) $x \in (A - (B \cap C)) \Rightarrow x \in A$ మరియు $x \notin (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ మరియు ($x \notin B$ లేదా $x \notin C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ మరియు $x \notin B$) లేదా ($x \in A$ మరియు $x \notin C$)

$\Rightarrow x \in (A - B)$ లేదా $x \in (A - C)$

$\Rightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$

∴ $A - (B \cap C)$లోని ప్రతి మూలకం $(A - B) \cup (A - C)$లో ఉంటుంది.

∴ $A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$ ——— (1)

(2) $x \in (A-B) \cup (A-C) \Rightarrow x \in (A-B)$ లేదా $x \in (A-C)$

$\Rightarrow (x \in A$ మరియు $x \notin B)$

లేదా $(x \in A$ మరియు $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ మరియు $(x \notin B$ లేదా $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ మరియు $x \notin (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A-(B \cap C)$

$\therefore$ $(A-B) \cup (A-C)$లోని ప్రతి మూలకం $A-(B \cap C)$లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $(A-B) \cup (A-C) \subset A-(B \cap C)$ ——— (2)

(1), (2)ల నుంచి $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

3. μ అనే సార్వత్రిక సమితికి A, Bలు రెండు ఉపసమితులైతే $(A \cup B)' = A' \cap B'$ అని చూపించండి?

Sol:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ అని చూపించడానికి

1) $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

2) $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ అని చూపించాలి.

(1) $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in (\mu-(A \cup B))$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $(x \notin A$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in \mu$ మరియు $x \notin A)$ మరియు

$(x \in \mu$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in (\mu-A)$ మరియు $x \in (\mu-B)$

$\Rightarrow x \in A'$ మరియు $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore$ $(A \cup B)'$లోని ప్రతి మూలకం $A' \cap B'$లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ ——— (1)

(2) $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A'$ మరియు $x \in B'$

$\Rightarrow x \in (\mu-A)$ మరియు $x \in (\mu-B)$

$\Rightarrow (x \in \mu$ మరియు $x \notin A)$ మరియు

$(x \in \mu$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $(x \notin A$ మరియు $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in \mu$ మరియు $x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow x \in \mu - (A \cup B)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore$ $A' \cap B'$లోని ప్రతి మూలకం $(A \cup B)'$లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ ——— (2)

(1), (2)ల నుంచి $(A \cup B)' = A' \cap B'$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. μ ఒక సార్వత్రిక సమితికి A, Bలు రెండు ఉపసమితులైతే $A \cap B = A-B' = B-A'$ అని చూపించండి?

Sol:

$A-B' = \{x ; x \in A$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \in A$ మరియు $x \in B\}$

$= A \cap B$

అదేవిధంగా $B-A' = \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \in A\}$

$= \{x ; x \in A$ మరియు $x \in B\}$

$= A \cap B$

$\therefore$ $A \cap B = A-B' = B-A'$

2. A, Bలు రెండు సమితులైతే $A'-B' = B-A$ అని చూపించండి?

Sol:

$A'-B' = \{x ; x \in A'$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \notin (A')'$ మరియు $x \in (B')'\}$

$= \{x ; x \notin A$ మరియు $x \in B\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

$= B-A$

3. $A \subset B$ అయితే $B' \subset A'$ అని చూపించండి?

Sol:

$x \in B' \Rightarrow x \notin (B')'$

$\Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A$ ($\because A \subset B$)

$\Rightarrow x \in A'$

$\therefore$ B'లోని ప్రతి మూలకం A'లో ఉంటుంది.

$\therefore$ $B' \subset A'$

4. $A \cap B' = A-B$ అని చూపించండి?

Sol:

$A \cap B' = \{x ; x \in A$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \in A$ మరియు $x \notin B\}$

$= \{x ; x \in A-B\}$

$A \cap B' = A-B$

5. A, Bలు ఏవైనా రెండు సమితులైతే.. $A'-B' = B-A$ అని చూపించండి?

Sol:

$A'-B' = \{x ; x \in A'$ మరియు $x \notin B'\}$

$= \{x ; x \in A'$ మరియు $x \in B\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \in A'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

$= \{x ; x \in B-A\}$

$\therefore$ $A'-B' = B-A$

6. $A \cap B = \varnothing$ అయితే $B \cap A' = B$ చూపించండి?

Sol:

$B \cap A' = \{x ; x \in B$ మరియు $x \in A'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin (A')'\}$

$= \{x ; x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

$= \{x ; x \in B\}$ ($\because A \cap B = \varnothing$)

$B \cap A' = B$

1 మార్కు ప్రశ్నలు

1. $n(A \cup B) = 51$, $n(A) = 20$, $n(B) = 44$ అయితే $n(A \cap B)$ విలువ ఎంత?

Sol:

$n(A \cup B) = 51$

$n(A) = 20$

$n(B) = 44$

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 20 + 44 - 51$

$= 13$

2. A ఒక సమితి అయితే $(A')' = A$ అని చూపించండి?

Sol:

$x \in (A')' \Rightarrow x \notin A'$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore (A')' \subset A$ ——— (1)

$x \in A \Rightarrow x \notin A'$

$\Rightarrow x \in (A')'$

$\therefore A \subset (A')'$ ——— (2)

(1), (2)ల నుంచి $(A')' = A$

3. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4, 5\}$ అయితే $A \Delta B$ కనుక్కోండి?

Sol:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$A - B = \{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\}$

$= \{1, 2\}$

$B - A = \{3, 4, 5\} - \{1, 2, 3\}$

$= \{4, 5\}$

$A \Delta B = \{1, 2\} \cup \{4, 5\}$

$= \{1, 2, 4, 5\}$

4. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$నకు సమితి నిర్మాణ రూపం రాయండి?

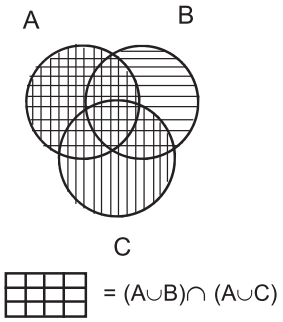
Sol:

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$A = \{x / x \in z, -3 \leq z \leq 3\}$

5. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ వెన్ చిత్రంలో చూపించండి?

Sol:



= $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

ప్రమేయాలు

1. ప్రమేయం: $x \in A$, $y \in B$ అయితే fలో ఏ రెండు క్రమయుగ్మాల జతలను ఒకే ప్రథమ నిరూపకాలు లేని (x, y) క్రమయుగ్మాల సమితిని ప్రమేయం f అంటారు. దీనిని $f: A \to B$ అని రాస్తాం. దీనిలో A ప్రదేశం, B సహప్రదేశం, f(A) వ్యాప్తి.

2. అన్వేక ప్రమేయం: f అనేది A నుంచి Bకి ప్రమేయమై, Bలోని విభిన్న మూలకాలు, Aలోని విభిన్న మూలకాలతో జతపరచిన f ను అన్వేక ప్రమేయం అంటారు.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ అయితే f అన్వేకం.

3. సంగ్రస్త ప్రమేయం: f అనేది A నుంచి Bకి ప్రమేయం అయి.. ప్రమేయ వ్యాప్తి Bకు సమానమైనా fను సంగ్రస్త ప్రమేయం అంటారు.

ప్రతి $y \in B$కి అనుగుణంగా $f(x) = y$ అయ్యేట్లు కనీసం ఒక మూలకం $x \in A$ ఉన్న fను సంగ్రస్తం అంటారు.

$$f(A) = B$$

4. ద్విగుణ ప్రమేయం: f అనే ప్రమేయం అన్వేకం, సంగ్రస్తం అయితే fను ద్విగుణ ప్రమేయం అంటారు.

5. అంతఃప్రమేయం: f అనేది A నుంచి Bకి ప్రమేయమై.. ప్రమేయ వ్యాప్తి Bకు ఉపసమితి అయితే fను అంతఃప్రమేయం అంటారు.

6. తత్సమ ప్రమేయం: $f: A \to A$ ప్రమేయం $f(x) = x \ \forall \ x \in A$ అయ్యేవిధంగా ఉంటే fను Aపై తత్సమ ప్రమేయం అంటారు.

7. స్థిర ప్రమేయం: ప్రమేయం $f: A \to B$, $f(x) = c \ \forall \ x \in A$ అయ్యేట్లు $c \in B$ వ్యవస్థితమైతే.. fను స్థిరప్రమేయం అంటారు.

8. వాస్తవ ప్రమేయం:

1. $f: A \to B$ ప్రమేయంలో ప్రదేశం A, వాస్తవసంఖ్య సమితి Rకు ఉపసమితి అయితే fను వాస్తవ చలరాశి ప్రమేయం అంటారు.
2. $f: A \to B$ ప్రమేయంలో B, Rకు ఉపసమితి అయితే.. అది వాస్తవ మూల్యప్రమేయం.
3. $f: A \to B$ ప్రమేయం అయి A, Bలు Rకు ఉపసమితి అయితే.. అది వాస్తవ ప్రమేయం.

9. విలోమ ప్రమేయం: $f: A \to B$ అనేది అన్వేక, సంగ్రస్తమైన f^{-1}: $B \to A$ను విలోమ ప్రమేయం అంటారు.

10. సమాన ప్రమేయం: ఒక ప్రదేశం Dపై నిర్వచితమైన ప్రమేయాలు f, gలు $f(x) = g(x) \ \forall \ x \in D$ అయ్యేట్లుంటే అలాంటి ప్రమేయాలను సమాన ప్రమేయాలు అంటారు.

11. సంయుక్త ప్రమేయం: $f: A \to B$, $g: B \to C$ రెండు ప్రమేయాలు అయితే.. f, gల సంయుక్త ప్రమేయాన్ని g o fతో సూచిస్తారు.

$g \circ f : A \to C$ అవుతుంది.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \ \forall \ x \in A$ అవుతుంది.

Note: $g \circ f \neq f \circ g$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $f(x) = x + 2$తో నిర్వచితమైన ప్రమేయ ప్రదేశం $\{x : 2 \leq x \leq 5\}$ అయితే.. f^{-1}ప్రమేయం వ్యవస్థితం అని చూపి, దాని ప్రదేశం, వ్యాప్తులను కనుక్కోండి?

sol:

$f(x) = x + 2$తో నిర్వచితమైన ప్రమేయ ప్రదేశం

$\{x : 2 \leq x \leq 5\}$

f(x) అన్వేకమని చూపటం:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2$

$x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ కాబట్టి f(x) అన్వేకం

f(x) సంగ్రస్తమని చూపటం:

$x + 2 = y$ అయితే $x = y - 2$

$f(x) = f(y - 2) = y - 2 + 2 = y$

$\therefore$ f(x) సంగ్రస్తం

f(x) అనేది అన్వేకం, సంగ్రస్తం కాబట్టి f(x) ద్విగుణ ప్రమేయం కాబట్టి $f^{-1}(x)$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

f^{-1} వ్యాప్తి = f ప్రదేశం = $\{x : 2 \leq x \leq 5\}$

f^{-1} ప్రదేశం = f వ్యాప్తి = $\{x + 2; 2 + 2 \leq x + 2 \leq 5 + 2\}$

$= \{x + 2; 4 \leq x + 2 \leq 7\}$

$= \{y; 4 \leq y \leq 7\}$

$\therefore f^{-1}$ ప్రదేశం = $\{y ; 4 \leq y \leq 7\}$

f^{-1} వ్యాప్తి = $\{x ; 2 \leq x \leq 5\}$

2. ప్రమేయాలు f, g, hలను కింది విధంగా నిర్వచించారు. $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3x - 1$, $h(x) = 2x$ అయితే $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ అని చూపండి?

sol:

$f(x) = x + 2$

$g(x) = 3x - 1$

$h(x) = 2x$

1. $(g \circ f)(x)$

$= g[f(x)]$

$= g[x + 2]$

$= 3(x + 2) - 1$

= 3x + 6 – 1
= 3x + 5

2. [h o (g o f)] (x) = h[(g o f) (x)]
= h (3x + 5)
= 2 (3x + 5)
= 6x + 10 ---------- (1)

3. (h o g) (x) = h [g(x)]
= h (3x – 1)
= 2 (3x – 1)
= 6x – 2

4. [(h o g) o f](x) = (h o g) [f(x)]
= (h o g) (x + 2)
= 6 (x + 2) – 2
= 6x + 12 – 2
= 6x + 10 ---------- (2)

(1), (2)ల నుంచి h o (g o f) = (h o g) o f

3. f(x) = x + 2, g (x) = 2x + 3, h(x) = 3x + 4 $\forall$ x $\in$ R అయితే (f o g) o h) = f o (g o h) అని చూపండి?

sol:

f (x) = x + 2
g (x) = 2x + 3
h (x) = 3x + 4

1. (f o g) (x) = f [g(x)]
= f (2x + 3)
= 2x + 3 + 2
= 2x + 5

2. [(f o g) o h](x) = (f o g) [h(x)]
= (f o g) (3x + 4)
= 2 (3x + 4) + 5
= 6x + 8 + 5
= 6x + 13 ---------- (1)

3. (g o h) (x) = g [h (x)]
= g (3x + 4)
= 2 (3x + 4) + 3
= 6x + 8 + 3
= 6x + 11 ---------- (2)

4. [f o (g o h] (x) = f [g o h (x)]
= f (6x + 11)
= 6x + 11 + 2
= 6x + 13

(1), (2)ల నుంచి (f o g) o h) = f o (g o h)

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. f;R {2} $\rightarrow$ R ప్రమేయం $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ తో నిర్వచితమైతే $f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=x$ అని చూపండి?

$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

$f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=\frac{\frac{2(2x+1)}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}$

$=\frac{\frac{2(2x+1)+x-2}{x-2}}{\frac{(2x+1)-2(x-2)}{x-2}}$

$=\frac{4x+2+x-2}{2x+1-2x+4}=\frac{5x}{5}$

$f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=x$

2. f (x) = x + 2, g (x) = x^2 – x – 2 అయితే $\frac{g(1)+g(2)+g(3)}{f(-4)+f(-2)+f(2)}$ విలువ కనుక్కోండి?

f (x) = x + 2
f (– 4) = – 4 + 2 = – 2
f (– 2) = – 2 + 2 = 0
f (2) = 2 + 2 = 4
g (x) = x^2 – x – 2
g (1) = 1^2 – 1 – 2 = – 2
g (2) = 2^2 – 2 – 2 = 0
g (3) = 3^2 – 3 – 2 = 4

$\therefore \frac{g(1)+g(2)+g(3)}{f(-4)+f(-2)+f(2)}=\frac{-2+0+4}{-2+0+4}$

2/2 = 1

3. f: R$\rightarrow$ R, f(x) = 3x – 4 అయితే f^{-1} కనుక్కోండి?

sol:

f (x) = 3x – 4 = y అనుకుంటే..

3x – 4 = y
3x = y + 4

$x=\frac{y+4}{3}, \quad x=f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y)=x=\frac{y+4}{3} \forall y \in R$

అంటే... $f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3} \forall x \in R$

4. f: R$\rightarrow$ R, g (x) = R$\rightarrow$ Rలు f(x) = 1 + 2x, g(x) = 3 – 2x అయితే (f o g) (3), (g o f) (3)లను కనుక్కోండి?

sol: f (x) = 1 + 2x
g(x) = 3 – 2x

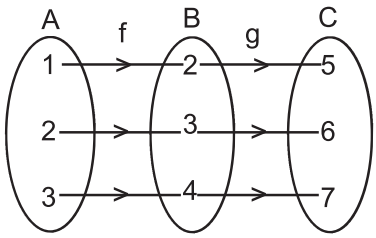
1. (f o g) (3) = f [g(3)]
= f (3 – 2 × 3)
= f (3 – 6)
= f (– 3)
= 1 + 2 (– 3)
= 1 – 6 = – 5

2. (g o f) (3) = g [f (3)]
= g (1+ 2 × 3)
= g (7)
= 3 – 2 × 7
= 3 – 14 = – 11

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. f {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}, g = {(2, 5), (3, 6), (4, 7)} అయితే (g o f) కనుక్కోండి?

sol:



$\therefore$(g o f) = {(1, 5), (2, 6), (3, 7)}

2. f {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)} అయితే f o f కనుక్కోండి?

sol:

f o f ప్రదేశం = f ప్రదేశం = {(1, 2, 3, 4}

(f o f) (1) = f [f(1)] = f(2) = 3

(f o f) (2) = f [f(2)] = f(3) = 4

(f o f) (3) = f [f(3)] = f(4) = 1

(f o f) (4) = f [f(4)] = f(1) = 2

$\therefore$(f o f) = {(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)}

3. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ అయితే $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ అని చూపండి?

sol:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right)$$

$$=\frac{1+x}{1-x}$$

$$=-\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

$$\therefore f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

= 0

4. ప్రమేయ శూన్యాన్ని నిర్వచించండి?

sol: x ఏ విలువ వద్ద ప్రమేయం విలువ శూన్యం అవుతుందో దాన్నే ప్రమేయ శూన్యవిలువ అంటారు.

5. f (x) = x^2 + 2x – 15 (x $\in$ R) f (–2), f (–3)లను కనుక్కోండి?

sol:

f (x) = x^2 + 2x – 15

f (–2) = $(-2)^2$ + 2(–2) – 15

= 4 – 4 – 15

= –15

f (–3) = $(-3)^2$ + 2(–3) – 15

= 9 – 6 – 15

= – 12

బహుపదులు

ముఖ్యాంశాలు

1. వర్గ సమీకరణం రూపం $ax^2+bx+c = 0$ $(a, b, c \in R)$
2. $ax^2 + bx + c = 0$ మూలాలు α, β అయితే

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

b^2-4acను విచక్షణి అంటారు.

3. వర్గ సమీకరణం $ax^2+bx+c = 0$ మూలాల మొత్తం = $-b/a$
4. $ax^2+bx+c = 0$ మూలాల లబ్ధం = c/a
5. α, βలు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం
   $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$
6. $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ అయితే x విలువ α, βల మధ్య ఉండదు.
7. $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ అయితే x విలువ α, βల మధ్య ఉంటుంది.
8. ఒక అకరణీయ పూర్ణాంకిక సమాసం f(x)ను (x–a)తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం f(a) అవుతుంది. దీన్నే శేష సిద్ధాంతం అంటారు.
9. f(x) అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసంలోని పదాల గుణకాల మొత్తం సున్నా అయితే f(x)కు (x–1) కారణాంకం అవుతుంది.
10. f(x) అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసంలోని బేసి ఘాతాల గుణకాల మొత్తం, సరి ఘాతాల గుణకాల మొత్తానికి సమానమైతే f(x)కు (x+1) కారణాంకం అవుతుంది.
11. గణితాను గమన సిద్ధాంతం; ఒక ప్రవచనం P(n)
    1) n = 1 అయితే ప్రవచనం నిజం,
    2) 1, 2,.....nలకు నిజమైనప్పుడల్లా (n+1) కూడా నిజమైతే.. n అన్ని విలువలకు P(n) నిజం.
12. ద్విపద సిద్ధాంతం; n ఒక సహజ సంఖ్య అయితే
    $(x+y)^n =$
    $^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}+.....+$
    $^nC_r x^{n-r}y^r+.....+ {}^nC_n y^n$
    ఇక్కడ $^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2,.....$లను ద్విపద గుణకాలు అంటారు.
13. $(x+y)^n$ విస్తరణలో (r+1)వ పదం $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r}y^r$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. శేష సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $4x^4-12x^3+7x^2+3x-2$ను కారణాంకాలుగా రాయండి?

Sol:

$f(x) = 4x^4-12x^3+7x^2+3x-2$

$x = 1$ అయితే $f(1) = 4(1)^4-12(1)^3+7(1)^2 + 3(1)-2$
$= 4-12+7+3-2$
$= 14 - 14 = 0$

$f(1) = 0$ కాబట్టి f(x)కు (x–1) కారణాంకమవుతుంది.

$x = 2$ అయితే, $f(2) = 4(2)^4 - 12(2)^3 + 7(2)^2 + 3(2)-2$
$= 64 - 96 + 28 + 6 - 2$
$= 0$

f(x)నకు (x–2) కారణాంకమవుతుంది.

హర్నర్ సంశ్లేషణ భాగహార పద్ధతి:

f(x)లోని పదాల గుణకాలను తీసుకుంటే...

x=1	4	–12	7	3	–2
	0	4	–8	–1	2
x=2	4	–8	–1	2	0
	0	8	0	–2	
	4	0	–1	0	

దత్త సమాసం f(x)కు కారణ రాశులు =
$(x-1)(x-2)(4x^2-1)$
$= (x-1)(x-2)[(2x)^2-1^2]$
$= (x-1)(x-2)(2x+1)(2x-1)$

2. x = 0 దగ్గర ax^2+bx+c విలువ –2, (x–1)తో భాగిస్తే శేషం 3, (x+1)తో భాగిస్తే శేషం –3 అయ్యేటట్లు a, b, c విలువలను తెల్పండి?

Sol:

ఇచ్చిన సమీకరణం $f(x) = ax^2+bx+c$
$x = 0$ అయితే f(x) విలువ = –2
$a(0) + b(0) + c = -2$
$\therefore c = -2$
f(x)ను (x–1)తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(1) = 3$
$a(1)^2 + b(1) + c = +3$
$a + b - 2 = +3 \quad (\because c = -2)$
$a + b = +3+2$
$a + b = +5$ _____ (1)
f(x)ను (x+1)తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(-1) = -3$
$a(-1)^2 + b(-1) + c = -3$
$a - b - 2 = -3$
$a - b = -3+2$
$a - b = -1$ _____ (2)

(1), (2)లను సాధిస్తే..
$a + b = 5$
$a - b = -1$

$2a = 4$
$a = 4/2 = 2$

(1) నుంచి $a + b = 5$
$2 + b = 5$
$b = 5-2 = 3$
$b = 3$
$\therefore a = 2, b = 3, c = -2$

3. $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^9$

విస్తరణలో x లేని పదం (స్థిర పదం)ను కనుక్కోండి?

Sol:

$\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^9$ విస్తరణలో $n = 9$

$x = 3x$

$y = -5/x^2$

$(x+y)^n$ విస్తరణలో $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}y^r$

$= {}^9C_r (3x)^{9-r}\left(\frac{-5}{x^2}\right)^r$

$= {}^9C_r 3^{9-r} x^{9-r} (-5)^r \frac{1}{x^{2r}}$

${}^9C_r\, 3^{9-r} (-5)^r x^{9-r-2r}$

x లేని పదం అంటే..

$x^{9-r-2r} = x^0$ కావాలి.

$9-3r = 0$

$3r = 9$

$r = 9/3 = 3$

$r = 3$ను T_{r+1}లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$\therefore \left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^9$ విస్తరణలో x లేని పదం =

${}^9C_r\, 3^{9-r}(-5)^r$

$= {}^9C_3\, 3^{9-3}\, (-5)^3$

$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\times\overset{4}{\cancel{8}}\times 7}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}}\times 3^6 (-5)^3$

$= -84 \times 3^6 \times 5^3$

4. **x^2+ax+b, x^2+bx+a $(a \neq b)$లకు ఒక ఉమ్మడి కారణాంక ముంటే... $a+b+1=0$ అని చూపించండి?**

Sol:

$f(x) = x^2 + ax + b$

$g(x) = x^2 + bx + a$ అనుకొంటే..

f(x), g(x)లకు ఉమ్మడి కారణాంకం (x–k) అనుకొంటే..

f(x)కు (x–k) కారణాంకం కాబట్టి

$f(k) = 0$

$k^2 + ak + b = 0$

$k^2 + ak + b = 0$ _____ (1)

g(x)కు (x–k) కారణాంకం కాబట్టి

$g(k) = 0$

$k^2 + bk + a = 0$ _____ (2)

(1), (2)ల నుంచి

$k^2 + ak + b = k^2 + bk + a$

$ak + b = bk + a$

$ak - bk = a-b$

$k(a-b) = a-b$

$k = a-b/a-b$

$k = 1$

$\therefore$ k విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$k^2 + ak + b = 0$

$1^2 + a(1) + b = 0$

$\therefore a + b + 1 = 0$

5. **xలో ఒక వర్గ సమాసాన్ని (x–1), (x–2), (x–3)లతో భాగిస్తే వరుసగా 1, 2, 4 శేషాలనిచ్చే ఒక వర్గ సమాసాన్ని కనుక్కోండి?**

Sol:

వర్గ సమాసం $f(x) = ax^2+bx+c$ అనుకొంటే..

f(x)ను (x–1)తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(1) = 1$

$a(1)^2 + b(1) + c = 1$

$a + b + c = 1$ _____ (1)

f(x)ను (x–2)తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(2) = 2$

$a(2)^2 + b(2) + c = 2$

$4a + 2b + c = 2$ _____ (2)

f(x)ను (x–3)తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(3) = 4$

$a(3)^2 + b(3) + c = 4$

$9a + 3b + c = 4$ _____ (3)

(1), (2)ల నుంచి

$a + b + c = 1$

$4a + 2b + c = 2$

తీసివేస్తే $-3a - b = -1$

(లేదా)

$3a + b = 1$ _____ (4)

(2), (3)ల నుంచి

$4a + 2b + c = 2$

$9a + 3b + c = 4$

తీసివేస్తే $-5a - b = -2$

(లేదా)

$5a + b = 2$ _____ (5)

(4), (5)లను సాధిస్తే..

$3a + b = 1$

$5a + b = 2$

తీసివేస్తే $-2a = -1$

$2a = 1$

$\boxed{a = 1/2}$

$a = 1/2$ను (4)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$3a + b = 1$

$3(1/2) + b = 1$

$b = 1 - 3/2$

$\boxed{b = -1/2}$

a, b విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$a + b + c = 1$

$1/2 - 1/2 + c = 1$

$\boxed{c = 1}$

∴ వర్గ సమాసం $f(x) = ax^2 + bx + c$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - mx + 5$ను $(x-3)$తో నిశ్శేషంగా భాగించేట్లు m విలువ ఎంత?

Sol:

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - mx + 5$

$f(x)$ను $(x-3)$ నిశ్శేషంగా భాగిస్తే...$f(3) = 0$

$f(3) = 3^4 - 2(3)^3 + 3(3)^2 - m(3) + 5 = 0$

$81 - 54 + 27 - 3m + 5 = 0$

$59 - 3m = 0$

$3m = 59$

$m = 59/3$

2. $x^2 - 11x + 10 > 0$ను సాధించండి?

Sol:

$x^2 - 11x + 10 > 0$

$x^2 - 10x - x + 10 > 0$

$x(x-10) - 1(x-10) > 0$

$(x-10)(x-1) > 0$

$x - 10 > 0, (x-1) > 0$

$(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ సాధన x విలువ

α, βల మధ్య ఉండదు. కాబట్టి

x విలువ 1, 10ల మధ్య ఉండదు.

3. $x^2 - 6x + 5 < 0$ సాధించండి?

Sol:

$x^2 - 6x + 5 < 0$

$x^2 - 5x - x + 5 < 0$

$x(x-5) - 1(x-5) < 0$

$(x-1)(x-5) < 0$

∴ సాధన సమితి = $\{1 < x < 5\}$

4. $\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^7$ విస్తరణలో మధ్య పదాలను కనుక్కోండి?

Sol:

ద్విపద ఘాతం 7 కాబట్టి విస్తరణలో 7+1 = 8 పదాలు ఉంటాయి. కాబట్టి 4, 5 పదాలు మధ్య పదాలు అవుతాయి.

$(x+y)^n$ విస్తరణలో $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

$\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^7$ విస్తరణలో

$T_4 = T_{3+1} = {}^7C_3 (3x)^{7-3} \left(\frac{1}{2x}\right)^3$

$${}^7C_3 . 3^4 x^4 . \frac{1}{2^3 . x^3}$$

$= {}^7C_3 \times \frac{81}{8}x$

$T_5 = T_{4+1} = {}^7C_4 (3x)^{7-4} \left(\frac{1}{2x}\right)^4$

$= {}^7C_4 \times 3^3 \times x^3 \times \frac{1}{2^4 \times x^4}$

$= {}^7C_4 \times \frac{27}{16x}$

5. రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల లబ్ధం 143 అయితే వాటిని కనుక్కోండి?

Sol:

రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలు = x, x+2 అనుకొంటే..

లబ్ధం = 143

$x(x+2) = 143$

$x^2 + 2x - 143 = 0$

$x^2 + 13x - 11x - 143 = 0$

$x(x+13) - 11(x+13) = 0$

$(x+13)(x-11) = 0$

$x = -13$ లేదా $x = 11$

∴ x = 11 అయితే వరుస బేసి సంఖ్యలు = 11, 13

x = –13 అయితే వరుస బేసి సంఖ్యలు = –13, –11

6. శేష సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించండి?

Sol:

నిర్వచనం: x చరరాశిగా గల అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసం $f(x)$ను $(x-a)$తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(a)$

నిరూపణ: x చరరాశిగా గల అకరణీయ పూర్ణాంక సమాసం $f(x)$

దీన్ని $(x-a)$తో భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలం $\phi(x)$, R శేషం అనుకొంటే..

$f(x) = (x-a)\,\phi(x) + R$

$f(a) = (a-a)\,\phi(a) + R$

$f(a) = R$

1 మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\sqrt{3}x^2 + 9x + 6\sqrt{3} = 0$ వర్గ సమీకరణం మూలాల మొత్తం, లబ్ధాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

వర్గ సమీకరణం $\sqrt{3}x^2 + 9x + 6\sqrt{3} = 0$

$a = \sqrt{3}, b = 9, c = 6\sqrt{3}$

మూలాల మొత్తం = $\frac{-b}{a} = \frac{-9}{\sqrt{3}}$

$= \frac{-3\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -3\sqrt{3}$

మూలాల లబ్ధం = $\frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$

2. $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$

మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం రాయండి?

Sol:

$\alpha = 2+\sqrt{3}$

$\beta = 2-\sqrt{3}$

$\alpha+\beta = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$

$\alpha\beta = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$= 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$

$\therefore$ వర్గ సమీకరణం $x^2-(\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

3. $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ను $(x-2)$తో భాగిస్తే వచ్చే శేషమెంత?

Sol:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

$f(x)$ను $(x-2)$తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం $f(2)$ అవుతుంది.

$\therefore f(2) = 2^3-3(2)^2 + 4(2) - 5$

$= 8 - 12 + 8 - 5$

$= -1$

4. రెండు వరుస సంఖ్యల లబ్ధం 72 అయితే వాటిని కనుక్కోండి?

Sol:

రెండు వరుస సంఖ్యలు = $x, x+1$ అనుకొంటే..

లబ్ధం = 72

$x(x+1) = 72$

$x^2 + x - 72 = 0$

$x^2 + 9x - 8x - 72 = 0$

$x(x+9) - 8(x+9) = 0$

$(x+9)(x-8) = 0$

$\therefore x = -9$ లేదా $x = 8$

$\therefore x = 8$ అయితే రెండు వరుస సంఖ్యలు = 8, 9

$x = -9$ అయితే రెండు వరుస సంఖ్యలు $-9, -8$

5. $3x^2-7x+2 = 0$ సమీకరణం మూలాల స్వభావాన్ని తెల్పండి?

Sol:

సమీకరణం $3x^2-7x+2 = 0$

$a = 3, b = -7, c = 2$

విచక్షణి $\Delta = b^2-4ac$

$= (-7)^2 - 4\times3\times2$

$= 49-24$

$= 25$

$\Delta > 0$ కాబట్టి మూలాల వాస్తవాలు, అసమానాలు.

6. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^8$ **విస్తరణలో 5వ పదం కనుక్కోండి?**

Sol:

$(x+y)^n$ విస్తరణలో $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r}y^r$

$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^8$ విస్తరణలో $T_{4+1} = T_5 = {}^8C_4\left(\frac{x}{y}\right)^{8-4}\left(\frac{y}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4 \times \frac{x^4}{y^4}\times\frac{y^4}{x^4}$

$= {}^8C_4$

5 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $x^2-x-6 = 0$ను $y = x^2$ రేఖా చిత్రం సాయంతో సాధించండి?

Sol:

$x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 = x+6$

$x^2 - x - 6 = 0$ వాస్తవ మూలాలు $y = x^2$, $y = x+6$ అనే వక్రాల ఖండన బిందువుల x నిరూపకాలు అవుతాయి.

$y = x^2$

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
y	0	1	4	9	1	4	9

$y = x+6$

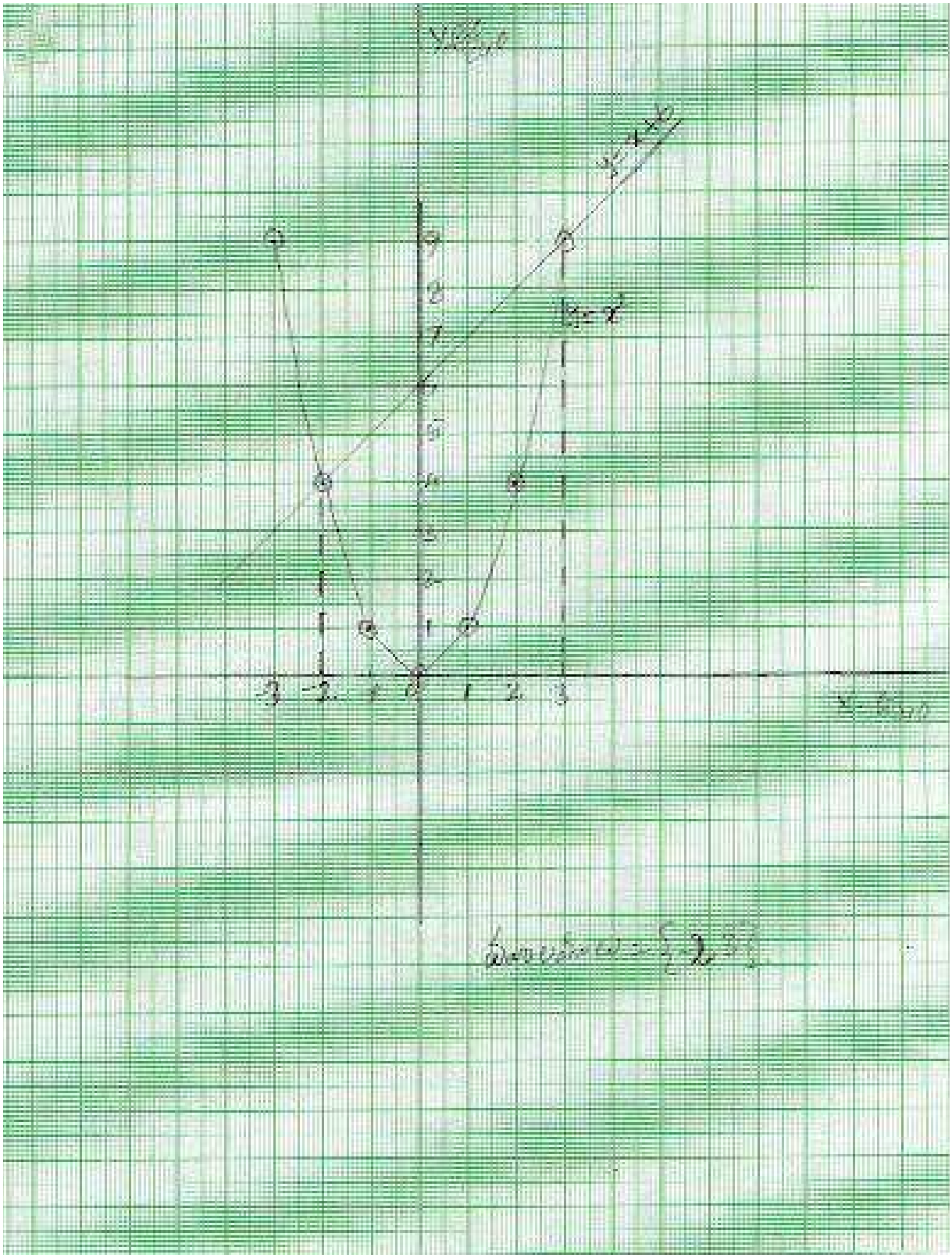
x	–2	3
y	4	9

స్కేలు: x-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 యూనిట్

y-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 యూనిట్

గ్రాఫ్ ద్వారా $y = x^2$, $y = x+6$ సరళరేఖల ఖండన బిందువులు $(-2, 4), (3, 9)$

$\therefore x^2 - x - 6 = 0$ సమీకరణ మూలాలు = $\{-2, 3\}$



2. $y = x^2–x–12$ రేఖాచిత్ర సహాయంతో $x^2–x–12 = 0$ సాధించండి?

Sol:

$$y = x^2–x–12$$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
–x	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4
–12	–12	–12	–12	–12	–12	–12	–12	–12	–12
y	8	0	–6	–10	–12	–12	–10	–6	0

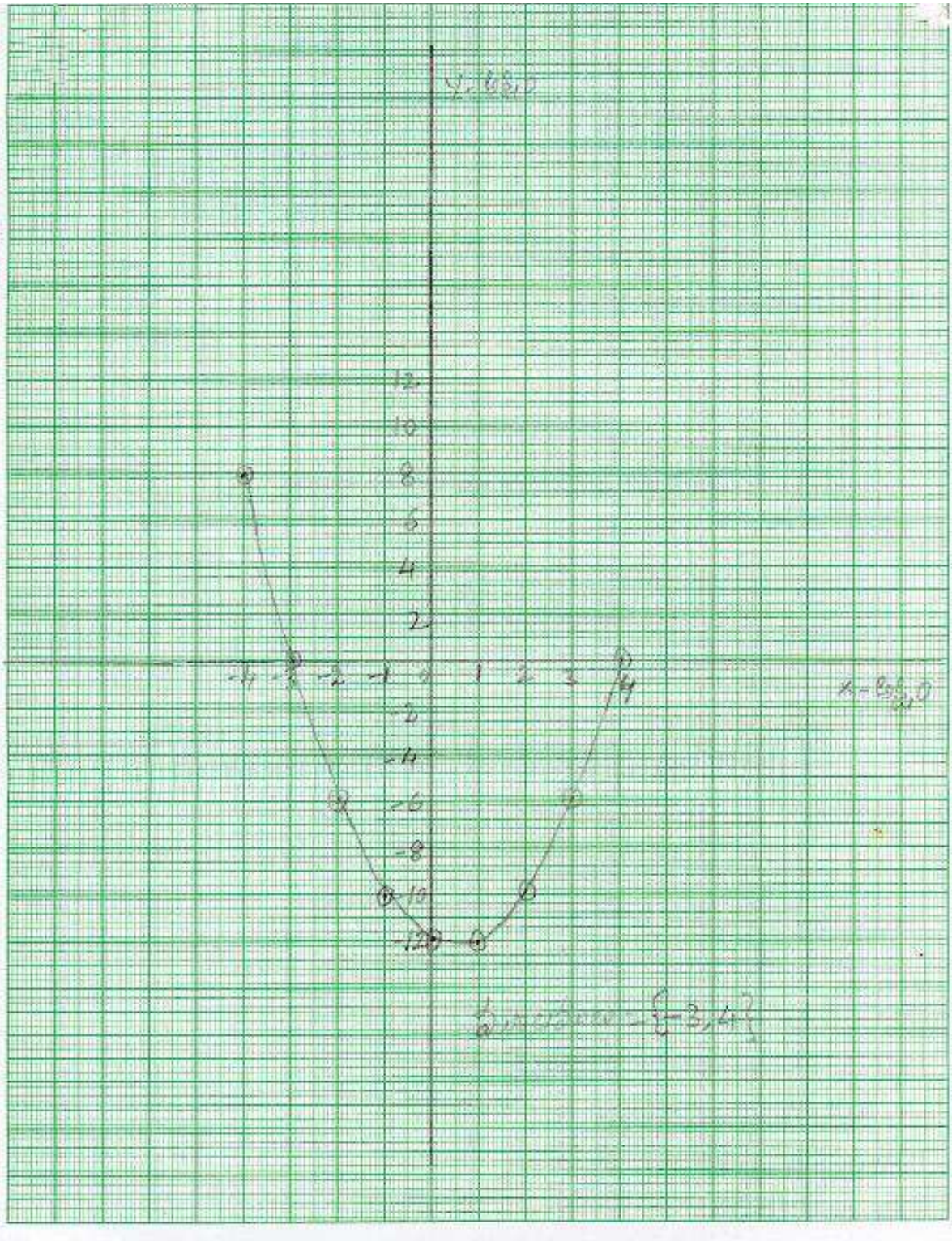
స్కేలు: x-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 యూనిట్

y-అక్షం 1 సెం.మీ = 2 యూనిట్

(–4, 8), (–3, 0), (–2, –6), (–1, –10), (0, –12), (1, –12), (2, –10), (3, –6) (4, 0) బిందువులను గ్రాఫ్‌పై చిత్రించాలి. వాటిని మృదువైన వక్రంతో కలిపితే మనకు కావల్సిన రేఖా చిత్రం వస్తుంది.

x-అక్షం ఖండన బిందువులు (4, 0), (–3, 0)

∴ సాధన సమితి విలువలు x = 4, x = –3


y = 0,5x²
x = 0,5x²
12
10
8
6
4
2
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-2
-4
-6
-8
-10
-12
Δ уравнение = 3,47

ఏకఘాత ప్రణాళిక

ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్య: x, y చలరాశుల్లో, రేఖీయ అసమీకరణాల్లో వ్యక్తం చేయడానికి వీలయ్యే కొన్ని పరిమితులకు లోబడి $f=Ax+By$ $(A, B\in R)$ ను గరిష్టం లేదా కనిష్టం చేసే సమస్యలను ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్య అంటారు.

ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యల సాధనలోని వివిధ సోపానాలు:

1. సమస్యలో ఇచ్చిన షరతులకు లోబడి అసమీకరణాలను జాబితా రూపంలో రాయాలి.
2. అసమీకరణాలను గ్రాపు కాగితంపై గీసి, అవి సూచించే ప్రదేశాలను ఛాయావృత్తం చేసి, బహుభుజి ప్రాంత శీర్షాలను గుర్తించండి.
3. లక్ష్యప్రమేయ సమాసాన్ని రాయండి.
4. బహుభుజి ప్రాంత శీర్షాల వద్ద (ప్రతి శీర్షం వద్ద) లక్ష్యప్రమేయ విలువలను కనుక్కోవాలి.
5. ఏ శీర్షం వద్ద లాభం గరిష్టం లేక కనిష్టం అవుతుందో అదే సమస్యకు సాధన అవుతుంది.

బహుతల సమితి: రేఖీయ అసమీకరణాల సాధన సమితి ఒక బిందువుల సమితి. దీనినే బహుతల సమితి అంటారు.

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. కుంభాకార సమితి అంటే ఏమిటి?

   ఒక తలంలో ఏవైనా రెండు బిందువులను తీసుకొని వాటిని కలుపగా ఏర్పడే రేఖాఖండం, సంపూర్ణంగా ఆ తలంలోనే ఇమిడి ఉంటే.. అలాంటి వాటిని కుంభాకార సమితి అంటారు.

2. లక్ష్యప్రమేయం అంటే ఏమిటి?

   గరిష్టం కాని, కనిష్టం గాని చేయాల్సిన ప్రమేయం $f = Ax+By$; $(A, B \in R)$ను లక్ష్యప్రమేయం అంటారు.

3. అనుకూల ప్రాంతం అంటే ఏమిటి?

   ఒక ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలోని షరతుల ద్వారా ఏర్పడే సంవృత లేదా వివృత కుంభాకార సమితినే అనుకూల ప్రాంతం అంటారు.

4. వివృత కుంభాకార బహుభుజి అంటే ఏమిటి?

   పరిమిత శీర్షాలు ఉన్న ఒక బహుభుజి ఒక భుజం వైపు తెరచి ఉంటే అలాంటి బహుభుజిని వివృత కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

5. సంవృత కుంభాకార బహుభుజి అంటే ఏమిటి?

   ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలోని రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ సాధనం సంవృత కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

6. అనుకూల సాధన అంటే ఏమిటి?

   అనుకూల ప్రాంతంలోని ప్రతి బిందువును అనుకూల సాధన అంటారు.

7. తుల్య లాభరేఖ అంటే ఏమిటి?

   లక్ష్యప్రమేయంతో నిర్ధారితమైన ఏ సమాంతర రేఖనైనా తుల్య లాభరేఖ అంటారు.

8. ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలో సమస్యకు ఎప్పుడు అనంత సాధనలు ఉంటాయి?

   తుల్య లాభరేఖ, బహుభుజి ప్రాంత అంచులలో ఏ అంచులో సమాంతరంగా ఉన్నా.. లేక ఏ అంచుతో ఏకీభవించినా సమస్యకు అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

రెండు మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఒక కుంభాకార బహుభుజి శీర్షాలు (0, 0), (6, 0), (4, 2 1/2), (0, 5) అయిన $F = 3x+2y$ను గరిష్టం చేయండి?

Sol. లక్ష్య ప్రమేయం $F = 3x+2y$

$(0, 0)$ వద్ద $F = 3(0) + 2(0) = 0$

$(6, 0)$ వద్ద $F = 3(6) + 2(0) = 18$

$(4, 2\ 1/2)$ వద్ద $F = 3(4) + 2(2\ 1/2) = 17$

$(0, 5)$ వద్ద $F = 3(0) + 2(5) = 10$

$\therefore$ $(6, 0)$ వద్ద f విలువ గరిష్టం అవుతుంది.

గరిష్ట విలువ = 18

2. ఒక ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యలో A(3, 0), B (0, 5) అనే బిందువుల వద్ద లక్ష్యప్రమేయం విలువలు వరుసగా 6, 15 అయితే లక్ష్యప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి?

Sol. లక్ష్యప్రమేయం $f = ax + by$ అనుకొనండి.

A (3, 0) వద్ద f విలువ = 6

$\therefore$ $a(3) + b(0) = 6$

$3a = 6$

$a = 6/3$

$a = 2$

B (0, 5) వద్ద f విలువ = 15

$a(0) + b(5) = 15$

$5b = 15$

$b = 15/5$

$b = 3$

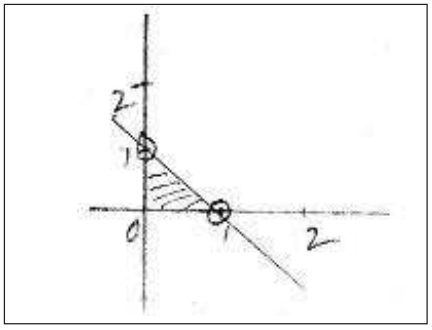
$\therefore$ లక్ష్యప్రమేయం $f = 2x+3y$

3. కింద ఇచ్చిన రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ సాధనలను రేఖాచిత్రాలపై చూపండి. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$?

Sol. $x \geq 0, y \geq 0$ అంటే మొదటి పాదం (Q_1) ను సూచిస్తుంది.

$x+y \leq 1$ సూచించాలంటే $x+y = 1$ సరళరేఖను గీసి, మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

x	0	1
y	1	0

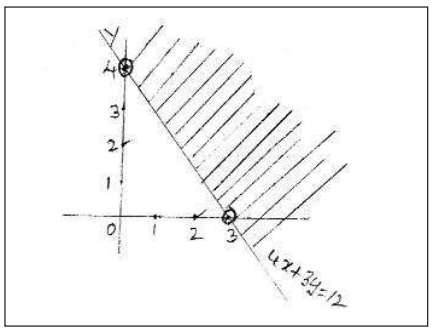


4. $4x+3y \geq 12$ అసమీకరణం సూచించు ప్రాంతాన్ని కనుక్కోండి?

Sol. $4x+3y \geq 12$ అంటే $4x+3y = 12$ సరళరేఖను గీయాలి.

$4x+3y \geq 12$లో (0, 0) ఉంచిన $0 \geq 12$, అసత్యం కాబట్టి $4x+3y=12$ సరళరేఖకు మూలబిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది.

x	0	3
y	4	0



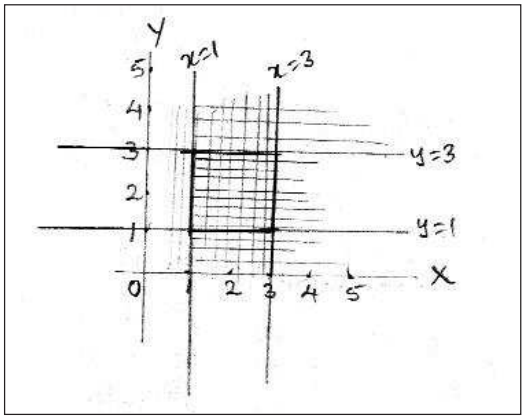
5. $x \geq 1, y \geq 1, x \leq 3, y \leq 3$ అనే రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ సాధనకు రేఖాచిత్రంపై చూపండి?

Sol.

1. $x \geq 1$ అంటే $x = 1, x > 1$

   $x = 1$ అను సరళరేఖను గీయాలి. ఇది y-అక్షానికి 1 యూనిట్ దూరంలో సమాంతరంగా ఉంటుంది. (0, 0) బిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది.
2. $y \geq 1$ అంటే $y=1$ సరళరేఖను గీచి మూల బిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచించాలి.
3. $x \leq 3$ అంటే $x = 3$ లేదా $x < 3$.

   $x=3$ సరళరేఖను గీసి, మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.
4. $y \leq 3$ అంటే $y = 3$ సరళరేఖను గీసి మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.



4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. కింది నియమాల దృష్ట్యా $f = 3x + y$ను గరిష్టం చేయండి?
   $8x+5y \leq 40, 4x+3y \geq 12$ $x \geq 0, y \geq 0$

Sol.

1. $x \geq 0, y \geq 0$ ల సాధన సమితి Q_1 (మొదటి పాదం)
2. $8x+5y \leq 40$ అంటే $8x+5y = 40$ సరళరేఖ గీయాలి.

   $8x+5y \leq 40$ అసమీకరణం (0, 0) వద్ద $0 \leq 40$ సత్యం కాబట్టి మూలబిందువు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

x	0	5
y	8	0

3. $4x+3y \geq 12$ అంటే $4x+3y = 12$ సరళరేఖను గీయాలి.

x	0	3
y	4	0

$4x+3y \geq 12$ అసమీకరణం (0, 0) వద్ద $0 > 12$ అసత్యం కాబట్టి మూలబిందువు లేని ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

లక్ష్య ప్రమేయం $f = 3x+y$

గ్రాపు ఆధారంగా సంవృత కుంభాకార బహుభుజి శీర్షాలు

A (3, 0), B(5, 0), C(0, 5), D(0, 4)

A (3, 0) వద్ద $f = 3(3)+0 = 9$

B (5, 0) వద్ద $f = 3(5)+0 = 15$

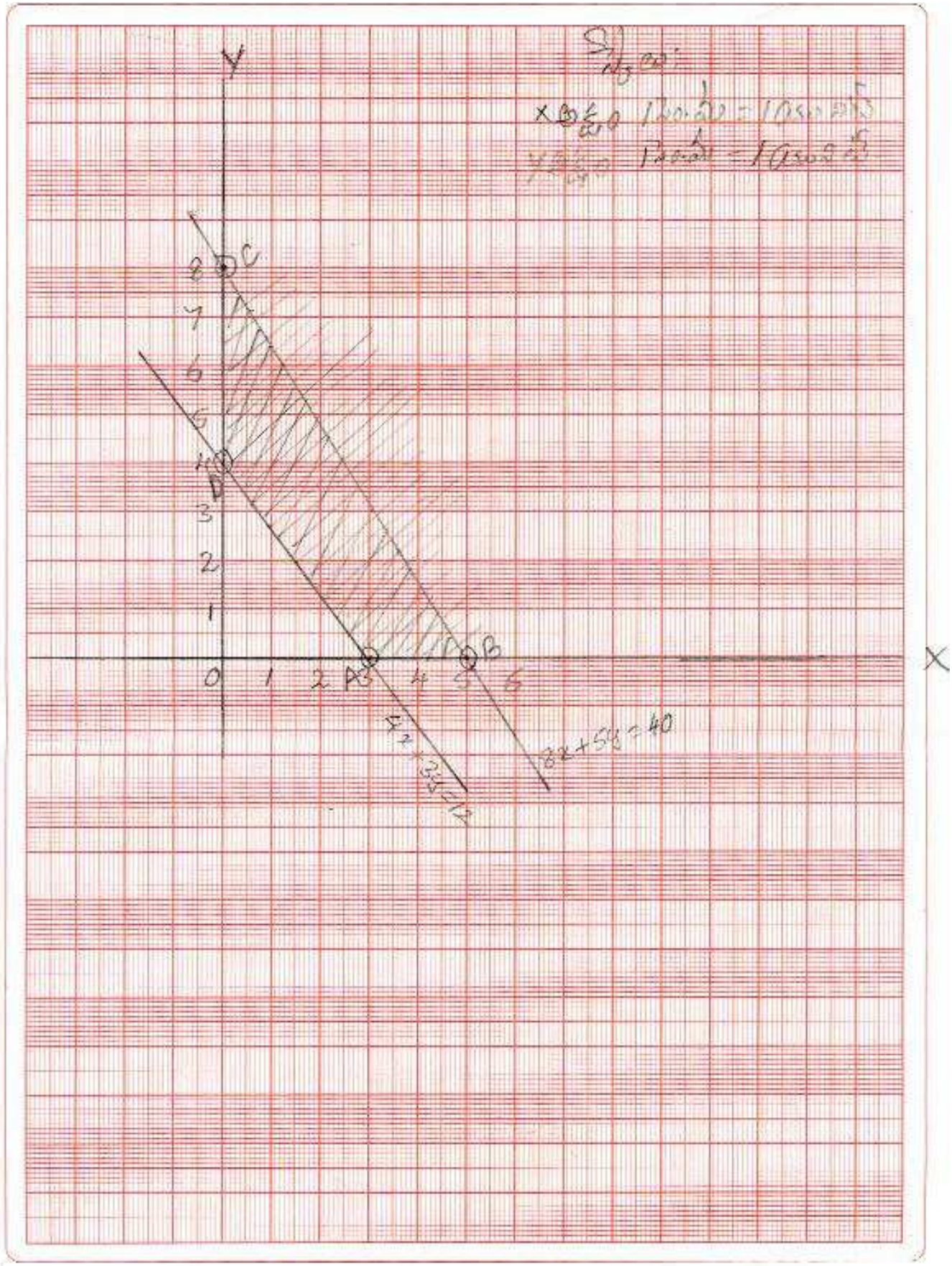
C (0, 5) వద్ద $f = 3(0)+5 = 5$

D (0, 4) వద్ద $f = 3(0)+4 = 4$

B (5, 0) వద్ద f విలువ గరిష్టం అవుతుంది.

$\therefore$ గరిష్ట విలువ = 15

(గ్రాఫ్ 4.1 చూడండి)



గ్రాఫ్ 4.1

2. ఇద్దరు దర్జీలు ప్రతిరోజూ రూ. 20, రూ. 25 సంపాదిస్తారు. A ప్రతి రోజు 4 చొక్కాలను, 2 పాంట్లను; B ప్రతిరోజూ 2 చొక్కాలను, 4 పాంట్లను కుట్టగలరు. కనీసం 100 చొక్కాలను, 110 పాంట్లను కనిష్ట ధరకు కుట్టాలంటే.. వారు ఒకొక్కరు ఎన్ని రోజులు పని చేయాలో కనుక్కొని సమస్యకు లక్ష్యప్రమేయాన్ని, అసమీకరణాల వ్యవస్థను రాయండి? (గ్రాఫ్ అవసరం లేదు)

Sol.

A పనిరోజుల సంఖ్య = x,

B పనిరోజుల సంఖ్య = y అనుకొనండి.

$x \geq 0, y \geq 0$ ఎందుకంటే.. పనిరోజుల సంఖ్య ధనాత్మకం

x రోజులలో A కుట్టు చొక్కాలు = 4x

y రోజులలో B కుట్టు చొక్కాలు = 2y

లెక్క ప్రకారం $4x + 2y \geq 100$

లేదా

$2x + y \geq 50$ .....(1)

x రోజులలో A కుట్టే ప్యాంట్లు = 2x

y రోజులలో B కుట్టే ప్యాంట్లు = 4y

లెక్క ప్రకారం

$2x + 4y \geq 110$

$x + 2y \geq 55$ .....(2)

మొదటి దర్జీ A ఒక రోజు సంపాదన = రూ. 20

B ఒక రోజులో సంపాదన = రూ. 25

x రోజులలో A సంపాదించినది = 20 x

y రోజులలో B సంపాదించినది = 25 y

∴ లక్ష్య ప్రమేయం $f = 20x + 25y$

3. ఒక దుకాణదారు రెండు విభిన్న రంగుల్లో ఉన్న చొక్కాలను 20 కంటే ఎక్కువ అమ్మలేడు. ఆకుపచ్చ చొక్కాల అమ్మకానికి కనీసం రెట్టింపు తెల్లచొక్కాలను అమ్ముతాడు. ప్రతి తెల్లచొక్కాపై లాభం రూ. 20. కాగా ప్రతి ఆకుపచ్చ చొక్కాపై లాభం రూ. 25 అయితే గరిష్ట లాభం పొందడానికి ఒక్కో రకపు చొక్కాలు ఎన్నింటిని అమ్మాలి? ఈ సమస్యకు సంబంధించిన షరతులను సూచించే అసమీకరణాలను, లక్ష్యప్రమేయాన్ని రాయండి. గ్రాపు గీయనవసరం లేదు?

Sol. ఆకుపచ్చని చొక్కాలు = x,

తెల్లని చొక్కాలు = y అనుకొనండి.

చొక్కాల సంఖ్య ధనాత్మకం కాబట్టి $x \geq 0, y \geq 0$.

ప్రతి రోజు రెండు చొక్కాలు కలిసి 20 కంటే ఎక్కువ అమ్మలేడు.

∴ $x + y \leq 20$ .....(1)

ప్రతిరోజు ఆకుపచ్చ చొక్కాలకు రెట్టింపు తెల్లచొక్కాలు అమ్మిన

$2x \leq y$

∴ $2x - y \leq 0$ .....(2)

తెల్లచొక్కాపై లాభం = రూ. 20

ఆకుపచ్చ చొక్కాపై లాభం = రూ. 25

∴ మొత్తం లాభం = $20x + 25y$

∴ లాభ ప్రమేయం $P = 20x + 25y$

4. ఒక మిఠాయి దుకాణంలో రెండు రకాల మిఠాయిలు A, Bలను 7కి.గ్రా. సంచులలో మిశ్రమం చేసే విధానం ఈ విధంగా ఉంది. A రకం మిఠాయి కనీసం 3 కి.గ్రా ఉండేటట్లు .. B రకం మిఠాయి 5 కి.గ్రా.ల కంటే ఎక్కువ కాకుండా కలపాలి. A రకం మిఠాయిపై ప్రతి కి.గ్రా.కు రూ. 15 లాభం.. B రకం మిఠాయిపై ప్రతి కి.గ్రా.కు రూ.20 లాభం పొందేటట్లయితే గరిష్ట లాభం పొందాలంటే ప్రతి 7 కి.గ్రా. సంచిలో ఏ రకం మిఠాయి ఎన్ని కి.గ్రా.లు ఉండాలి. ఈ సమస్యకు సంబంధించిన షరతులను సూచించే అసమీకరణాలను, లక్ష్యప్రమేయాన్ని రాయండి. గ్రాఫ్ గీయనవసరం లేదు?

Sol. మిఠాయి కొట్టువాని మిఠాయి రకాలు = A, B అనుకొనండి.

A రకం మిఠాయి కనీసం 3 కి.గ్రా., B రకం మిఠాయి కనీసం 5 కి.గ్రా. కంటే ఎక్కువ కాకుండా అంటే $A \geq 3, B \leq 5$ .....(1)

ఒక్కొక్క సంచిలో నింపగల మిఠాయి బరువు = 7 కి.గ్రా.

∴ $A+B \leq 7$ .....(2)

A రకం మిఠాయిపై లాభం = రూ. 15

B రకం మిఠాయిపై లాభం = రూ. 20

∴ లాభప్రమేయం $P = 15A+20B$

5 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $2x+3y \leq 12$, $3x+y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$లకనుగుణంగా $f=5x+7y$ను గరిష్టం చేయండి?

$x \geq 0, y \geq 0$ల సాధనసమితి Q_1(మొదటిపాదం)

$2x+3y \leq 12$ అంటే $2x+3y = 12$ సరళరేఖను గీయాలి.

x	0	6
y	4	0

$2x+3y \leq 12$ లో (0, 0) ప్రతిక్షేపిస్తే $0 \leq 12$ సత్యం కాబట్టి

$2x+3y \leq 12$ సాధన క్షేత్రం మూలబిందువు వైపు ఉంటుంది.

$3x+y \leq 12$ అంటే $3x+y = 12$ సరళరేఖ గీయాలి.

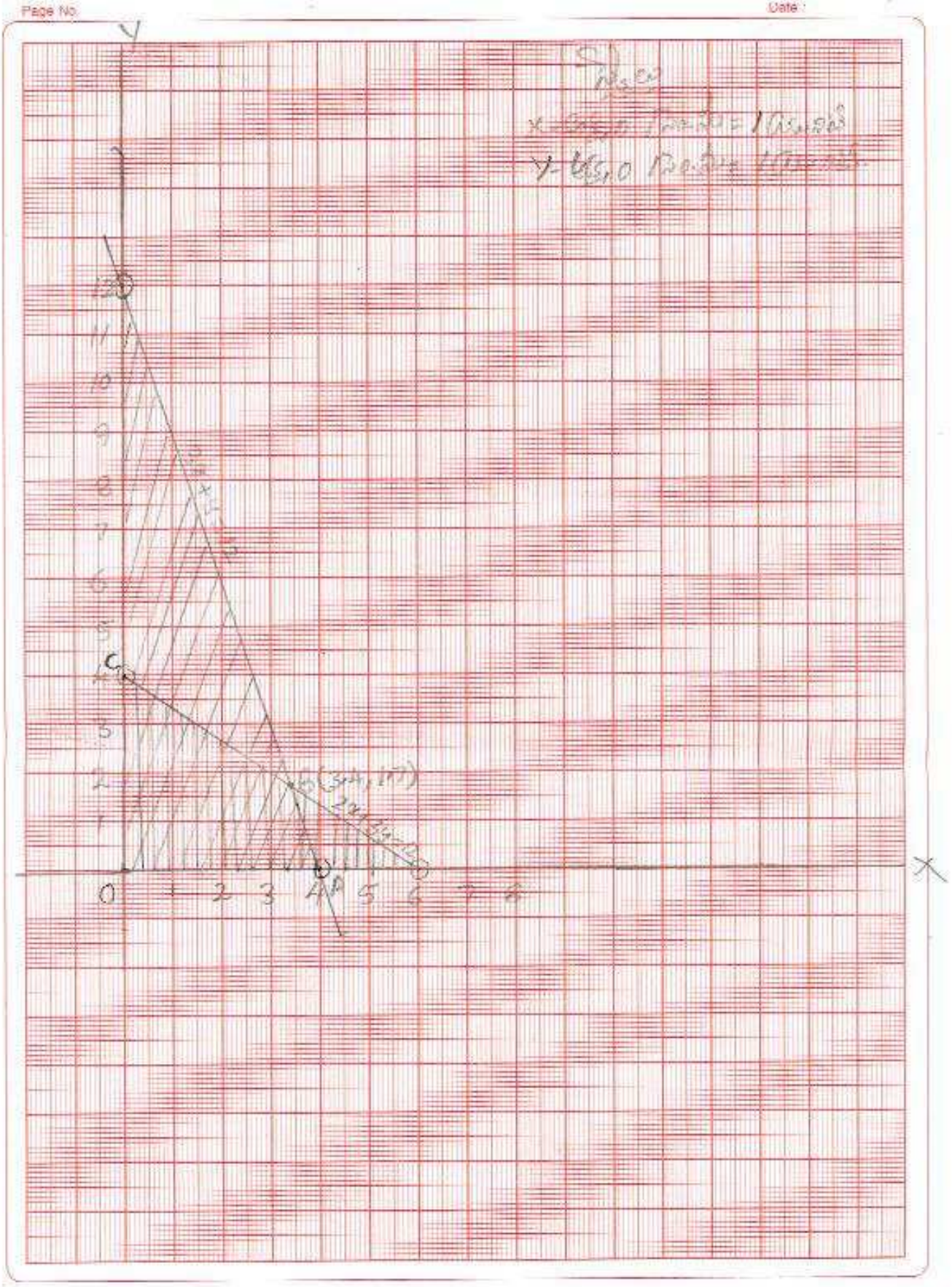
x	0	4
y	12	0

$3x+y \leq 12$ నందు (0, 0) ఉంచిన $0 \leq 12$ సత్యం కాబట్టి $3x+y \leq 12$ ప్రాంతం కూడా మూలబిందువు వైపే ఉంటుంది. పై రేఖా చిత్రాల ద్వారా కుంభాకార బహుభుజి OABC అవుతుంది.

బహుభుజి శీర్షాలు O (0, 0), A (4, 0), B (3.4, 1.7), C (0, 4)

లక్ష్యప్రమేయం $f = 5x+7y$

O(0, 0) వద్ద $f=5(0) + 7(0) = 0$



గ్రాఫ్ 4.2

A (4, 0) వద్ద f=5(4) + 7(0) = 20

B (3.4, 1.7) వద్ద f=5(3.4) + 7(1.7)
= 17 + 11.9 = 28.9

C (0, 4) వద్ద f=5(0) + 7(4) = 28

∴ B (3.4, 1.7) వద్ద లక్ష్యప్రమేయం గరిష్టం అవుతుంది.

∴ గరిష్ట విలువ = 28.9

(గ్రాఫ్ 4.2ను చూడండి.)

2. $x + y \geq 6, 2x+y \geq 8, x \geq 0, y \geq 0$నియమాల దృష్ట్యా $f = x+y$ ను కనిష్టం చేయండి?

Sol. $x \geq 0, y \geq 0$ల సాధన సమితి Q_1(మొదటి పాదం)

$x + y \geq 6$ అంటే $x + y = 6$ సరళరేఖ గీయాలి.

x	0	6
y	6	0

$x + y \geq 6$ లో (0, 0) ప్రతిక్షేపించిన $0 \geq 6$ అసత్యం కాబట్టి $x+y \geq 6$ సాధ్యక్షేత్రం మూలబిందువు లేని ప్రాంతం.

$2x+y \geq 8$లో అంటే $2x+y = 8$ సరళరేఖను గీయాలి.

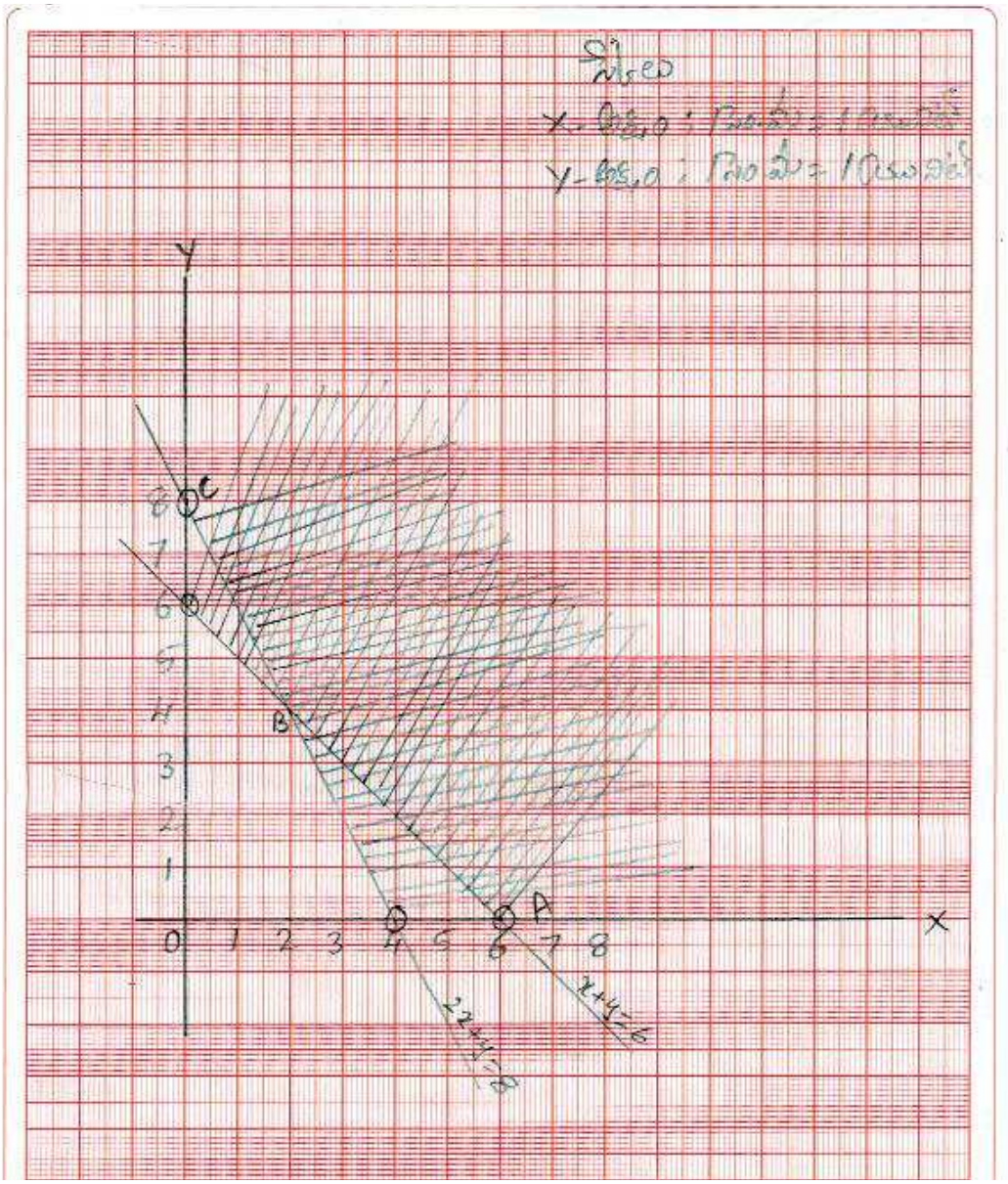
x	0	4
y	8	0

$2x+y \geq 8$లో (0, 0) ప్రతిక్షేపించగా $0 \geq 8$ అసత్యం కాబట్టి $2x+y \geq 8$ సాధ్యక్షేత్రం మూలబిందువు లేని ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది.

పై వాటిని రేఖాచిత్రంలో సూచించిన ABC వివృత కుంభాకార బహుభుజి ఏర్పడుతుంది.

శీర్షాలు A (6, 0), B(2, 4), C(0, 8)

లక్ష్యప్రమేయం $f = x+y$



గ్రాఫ్ 4.3

A (6, 0) వద్ద f = 6+0 = 6

B (2, 4) వద్ద f = 2+4 = 6

C (0, 8) వద్ద f = 0+8 = 8

A (6, 0), B (2, 4) వద్ద f = x+y కనిష్టం అవుతుంది.

కనిష్ట విలువ = 6

(గ్రాఫ్ 4.3ను చూడండి.)

3. కింది నియమాలకు అనుగుణంగా f=2x+yను గరిష్టం చేయండి?

$2x+y \le 8, y \le 4, x \le 3, x \ge 0, y \ge 0.$

1. $x \ge 0, y \ge 0$ల సాధన సమితి Q_1 మొదటి పాదం
2. $x \le 3$ రేఖాచిత్రం గీయాలంటే $x = 3$ సరళరేఖను గీసి మూలబిందువు వైపు ప్రాంతాన్ని సూచించాలి.
3. $y \le 4$ రేఖాచిత్రం గీయాలంటే.. $y = 4$ సరళరేఖను గీసి మూలబిందువు వైపు ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.
4. $2x+y \le 8$ రేఖాచిత్రం గీయాలంటే.. $2x+y = 8$ సరళరేఖ గీయాలి. $2x+y \le 8$లో (0, 0) ఉంచిన $0 \le 8$ సత్యం కాబట్టి మూలబిందువు వైపు ఉన్న ప్రాంతాన్ని షేడ్ చేయాలి.

x	0	4
y	8	0

పై వాటిని రేఖాచిత్రంలో సూచించినపుడు OABCD కుంభాకార బహుభుజి ఏర్పడింది.

బహుభుజి శీర్షాలు 0 (0, 0), A(3, 0), B(3, 2),C(2, 4),D(0,4)

లక్ష్య ప్రమేయం f = 2x+y

O (0, 0) వద్ద f = 2(0)+0 = 0

A (3, 0) వద్ద f = 2(3)+0 = 6

B (3, 2) వద్ద f = 2(3)+2 = 8

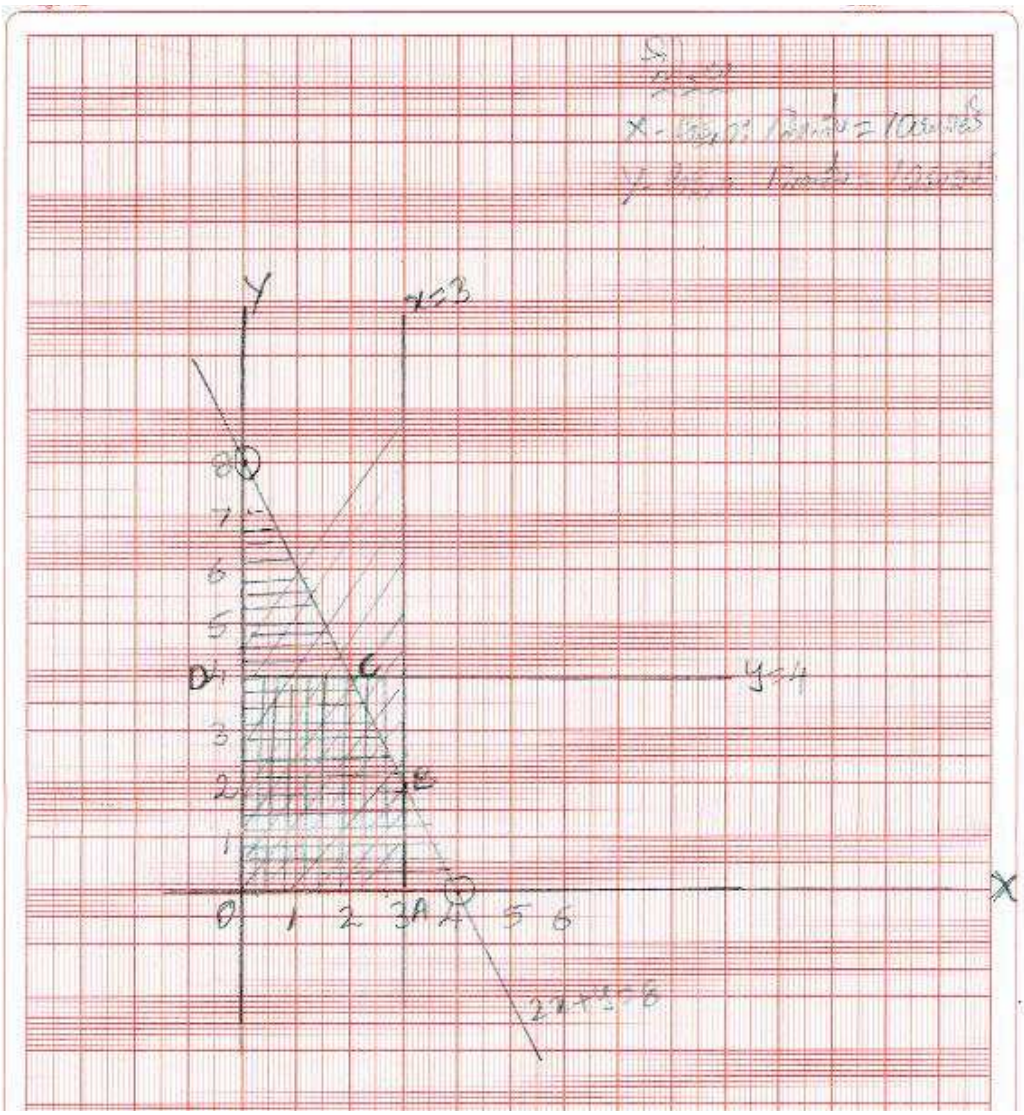
C (2, 4) వద్ద f = 2(2)+4 = 8

D (0, 4) వద్ద f = 2(0)+4 = 4

B (3, 2), C (2, 4) వద్ద లక్ష్యప్రమేయం గరిష్టం అయింది.

∴ గరిష్ట విలువ = 8

(గ్రాఫ్ 4.4ను చూడండి.)



గ్రాఫ్ 4.4

వాస్తవ సంఖ్యలు

ముఖ్యాంశాలు:

1. x ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే x మాపం లేదా పరమ మూల్యం |x| ను $|x| = x, x > 0$
   $= -x, x < 0$
   $= 0, x = 0$ అని నిర్వచిస్తాం.
2. a ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయితే $|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$
3. a ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయితే $|x| \ge a \Rightarrow x \ge a$ లేదా $x \le -a$
4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$ (n అకరణీయ సంఖ్య)
5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $lmn = 1$ అయితే $\frac{1}{1+l+m^{-1}} + \frac{1}{1+m+n^{-1}} + \frac{1}{1+n+l^{-1}} = 1$ అని చూపండి?

sol:

1. $\frac{1}{1+l+m^{-1}} = \frac{1}{1+l+\frac{1}{m}} \quad \left(\because a^{-1} = \frac{1}{a}\right)$

$= \frac{m}{m+lm+1}$

$= \frac{m}{m+\frac{1}{n}+1} \quad \left(\because lmn = 1,\ lm = \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{mn}{mn+1+n}$ .....(1)

2. $\frac{1}{1+m+n^{-1}} = \frac{1}{1+m+\frac{1}{n}}$

$= \frac{n}{n+mn+1}$ .....(2)

3. $\frac{1}{1+n+l^{-1}} = \frac{1}{1+n+mn}$ .....(3) $\quad \left(\because lmn = 1,\ mn = \frac{1}{l} = l^{-1}\right)$

(1) + (2) + (3) చేయగా..

$\text{L.H.S} = \frac{1}{1+l+m^{-1}} + \frac{1}{1+m+n^{-1}} + \frac{1}{1+m+l^{-1}}$

$\frac{mn}{mn+1+n} + \frac{n}{n+mn+1} + \frac{1}{1+n+mn}$

$= \frac{\cancel{mn+n+1}}{\cancel{mn+1+n}}$

= 1 R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

2. $y = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ అయితే $3y^3 - 9y = 10$ అని చూపండి?

sol:

$y = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$y^3 = \left(\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3$

$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$

$y^3 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$

$= 3 + \frac{1}{3} + 3y$

$= \frac{9+1+9y}{3}$

$3y^3 = 10 + 9y$

$3y^3 - 9y = 10$

3. $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}} = 1$ అని చూపండి?

sol:

L.H.S

$= \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$

$= \frac{1}{1+\frac{x^a}{x^b}+\frac{x^a}{x^c}} + \frac{1}{1+\frac{x^b}{x^c}+\frac{x^b}{x^a}} + \frac{1}{1+\frac{x^c}{x^a}+\frac{x^c}{x^b}}$

$= \frac{x^b x^c}{x^b x^c + x^a x^c + x^a x^b} + \frac{x^c x^a}{x^c x^a + x^b x^a + x^b x^c} + \frac{x^a x^b}{x^a x^b + x^c x^b + x^c x^a}$

$= \frac{x^{b+c}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}} + \frac{x^{c+a}}{x^{c+a}+x^{b+a}+x^{b+c}} + \frac{x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{c+b}+x^{c+a}}$

$= \frac{x^{b+c}+x^{c+a}+x^{a+b}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}$

= 1 R.H.S.

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

4. $\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}{x-a}$ ను గణన చేయండి?

sol:

$\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}{x-a}$ లవాన్ని అకరణీయం చేయగా

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}{x-a}\times\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2-\left(\sqrt{2a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{x+a-2a}{(x-a)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+a}+\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}+\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2a}}$$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $a=x+\sqrt{x^2+1}$ అయితే $x=\frac{1}{2}\left(a-a^{-1}\right)$ అని చూపండి?

sol:

$$a=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$a-x=\sqrt{x^2+1}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$(a-x)^2=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2$$

$$a^2-2ax+x^2=x^2+1$$

$$a^2+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1=2ax$$

$$a^2-1=2ax$$

$$\therefore x=\frac{a^2-1}{2a}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{a}-\frac{1}{a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a-a^{-1}\right]$$

2. $\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\frac{m}{n}a^{m-n}$ అని చూపండి?

sol:

$\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\frac{a^m-a^m}{a^n-a^n}=\frac{0}{0}$ అనిర్ధారకం.

$\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ లవహారాలను (x-a)తో భాగించగా

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\left(x^m-a^m\right)\big/(x-a)}{\left(x^n-a^n\right)\big/(x-a)}$$

$$=\frac{\underset{x\to a}{Lt}\left(x^m-a^m\right)\big/(x-a)}{\underset{x\to a}{Lt}\left(x^n-a^n\right)\big/(x-a)}$$

$$=\frac{m.a^{m-1}}{n.a^{n-1}}$$

$$=\frac{m}{n}a^{m-1-n+1}$$

$$=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

$$\therefore \underset{x\to a}{Lt}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

3. $a^{1/3}+b^{1/3}+c^{1/3}=0$ అయితే $(a+b+c)^3=27abc$ అని చూపండి?

sol:

$a^{1/3}+b^{1/3}+c^{1/3}=0$

$a^{1/3}+b^{1/3}=-c^{1/3}$

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$(a^{1/3}+b^{1/3})^3=(-c^{1/3})^3$ $\quad\because (a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$(a^{1/3})^3+(b^{1/3})^3+3a^{1/3}b^{1/3}(a^{1/3}+b^{1/3})=-c$

$a+b+3a^{1/3}b^{1/3}(-c^{1/3})=-c$

$a+b-3a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}=-c$

$a+b+c=3a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}$

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$(a+b+c)^3=(3a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3})^3$

$(a+b+c)^3=27abc$

4. $a^x=b^y=c^z$; $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ అయితే $y/x=\frac{2z}{x+z}$ అని చూపండి?

sol:

$a^x=b^y=c^z=k$ అనుకొంటే...

$a^x=k$

$a=k^{1/x}$

అదేవిధంగా $b=k^{1/y}$

$c = k^{1/z}$

లెక్క ప్రకారం $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$b^2 = ac$

$\left(k^{1/y}\right)^2 = k^{1/x}.k^{1/z}$

$k^{2/y} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$\frac{2}{y} = \frac{z+x}{xz}$

$\frac{y}{2} = \frac{xz}{z+x}$

$\frac{y}{x} = \frac{2z}{z+x}$

5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$ ను గణనం చేయండి?

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2} = \frac{2^2-7\times 2+10}{2-2}$

$= \frac{0}{0}$ (అనిర్ధారకం)

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

$x^2 - 7x + 10$కు కారణరాశులు = $x^2 - 5x - 2x + 10$
$= x(x - 5) - 2(x - 5)$
$= (x - 2)(x - 5)$

$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{(x-2)}}$

$= 2 - 5$
$= -3$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\lim_{x\to a} \frac{x^{1/4}-a^{1/4}}{x^4-a^4}$ ను గణనం చేయండి?

sol:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \frac{m}{n}a^{m-n}}$$

$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^{1/4}-a^{1/4}}{x^4-a^4} = \frac{1/4}{4}.a^{\frac{1}{4}-4}$

$= \frac{1}{4\times 4}\ a^{\frac{1-16}{4}}$

$= \frac{1}{16}\ a^{-\frac{15}{4}}$

$= \frac{1}{16a^{15/4}}$

2. $|2x - 3| \le 7$ సాధించండి?

sol:

$|x| \le a$ సాధన $-a \le x \le a$ కాబట్టి

$|2x - 3| \le 7$ సాధన $-7 \le 2x - 3 \le 7$

$-7+3 \le 2x - \cancel{3} + \cancel{3} \le 7+3$

$-4 \le 2x \le 10$

$-\frac{4}{2} \le \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \le \frac{10}{2}$

సాధన సమితి = $-2 \le x \le 5$

3. $|5p - 7| \ge 9$ సాధించండి?

sol:

$|x| \ge a$ సాధన $x \ge a$ లేదా $x \le -a$ కాబట్టి

$|5p - 7| \ge 9 \Rightarrow 5p - 7 \ge 9$ లేదా $5p - 7 \le -9$

$5p \ge 9 + 7$ లేదా $5p \le -9 + 7$

$p \ge 16/5$ లేదా $p \le -2/5$

$\therefore$ సాధన = $p \ge 16/5$ లేదా $p \le -2/5$

4. $\left(x^{2/3}\right)^p = x^2$ అయితే pను కనుక్కోండి?

$\left(x^{2/3}\right)^p = x^2$

$x^{\frac{2p}{3}} = x^2 \Rightarrow \frac{2p}{3} = 2$

$p = \cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}}$

$p = 3$

5. $x = a^p$, $y = a^q$, $x^q.y^p = a^{2/r}$ అయితే $pqr = 1$అని చూపండి?

sol:

$x = a^p$, $y = a^q$,
$x^q.y^p = a^{2/r}$
$x^q.y^p = a^{2/r}$
$(a^p)^q.\ (a^q)^p = a^{2/r}$
$a^{pq}.\ a^{pq} = a^{2/r}$
$a^{pq\ +\ pq} = a^{2/r}$
$a^{2pq} = a^{2/r}$
$2pq = 2/r$
$pq = 1/r$
$pqr = 1$

శ్రేఢులు

అంకశ్రేఢి (A.P): మొదటి పదం మినహా మిగితా పదాలన్నీ దాని పూర్వ పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలిపితే ఏర్పడిన సంఖ్యల వరుసలను అంకశ్రేఢులంటారు (A.P). ఈ కలిపిన స్థిర సంఖ్యను పదాంతరం (d) అని, మొదటి పదం (a)ను t_1తో సూచిస్తాం.

$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$... etc.,

అంకశ్రేఢి సాధారణ రూపం: మొదటి పదం a, పదాంతరం d అయితే

a, a+d, a+2d, ... $a + \overline{n-1}d$

అంకశ్రేఢిలో nవ పదం $t_n = a+(n-1)d$

where $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ = etc.,

అంకశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం:

అంకశ్రేఢిలోని 'n'వ పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

(లేదా)

$= \frac{n}{2}\left[a + l\right]$

where l = చివరి పదం

అంకమధ్యమం (A.M): a, b, cలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే bను a, cల అంకమధ్యమం అంటారు.

$b = \frac{a+c}{2}$

1. 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం = $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\Sigma n)^2$

గుణశ్రేఢి (G.P): మొదటి పదం తప్ప మిగితా పదాలన్నీ దానికి ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర నిష్పత్తిలో ఉన్న శ్రేఢిని గుణశ్రేఢి అంటారు. ఈ స్థిర నిష్పత్తిని సామాన్య నిష్పత్తి (r) అంటారు.

$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$ = etc.,

గుణశ్రేఢి సాధారణ రూపం: మొదటి పదం a, సామాన్య నిష్పత్తి 'r' అయితే a, ar, ar^2, ar^3, ...ar^{n-1}

గుణశ్రేఢిలో 'n'వ పదం $t_n = ar^{n-1}$

గుణశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం:

గుణశ్రేఢిలోని 'n' పదాల మొత్తం $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, (r<1)$

(లేదా)

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, (r>1)$

గుణశ్రేఢిలో పదాల సంఖ్య అపరిమితమైతే.. దాన్ని అనంత గుణశ్రేఢి అంటారు.

అనంత గుణశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం $S_\alpha = \frac{a}{1-r}$

గుణమధ్యమం (G.M): a, b, cలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటే.. bను a, cల గుణమధ్యమం అంటారు.

$b = \sqrt{ac}$

హరాత్మక శ్రేఢి (H.P): ఇచ్చిన శ్రేఢిలో ప్రతి పదం వుత్క్రమ్యం (విలోమాలు) అంకశ్రేఢిలో ఉన్నట్లయితే... ఆ శ్రేఢిని హరాత్మక శ్రేఢి అంటారు. అంకశ్రేఢి విలోమాలు హరాత్మక శ్రేఢి.

హరాత్మక శ్రేఢిలో 'n'వ పదం $t_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$

హరాత్మక శ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తానికి సూత్రం లేదు.

హరాత్మక మధ్యమం (H.M):

a, b, cలు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే.. bను a, cల హరాత్మక మధ్యమం అంటారు.

$b = \frac{2ac}{a+c}$

a, b, cల అంకమధ్యమం A, గుణమధ్యమం G, హరాత్మక మధ్యమం H అయితే... $G^2 = A.H$ అవుతుంది, $A \geq G \geq H$

A, G, Hలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. మొదట 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం S_1, వర్గాల మొత్తం S_2, ఘనాల మొత్తం S_3 అయితే $9S^2_2 = S_3 (1+8S_1)$ అని చూపించండి?

Sol:

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_3(1+8S_1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[1+\cancel{8}^{4}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\right]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[1+4n(n+1)\right]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left(1+4n^2+4n\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[(2n)^2+2.2n+1\right]$$

$$S_3(1+8S_1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4}$$

R.H.S.లోని లవ, హారాలను 9తో గుణిస్తే..

$$S_3(1+8S_1)^2 = \frac{9n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{9\times 4}$$

$$= 9\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2$$

$$= 9S^2{}_2$$

$$\therefore S_3(1+8S_1)^2 = 9S_2{}^2$$

2. 0.5 + 0.55 + 0.555 +..... శ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

S_n = 0.5 + 0.55 + 0.555 +.....n పదాలు

= 5[0.1 + 0.11 + 0.111 +.....n పదాలు]

= 5[1/10 + 11/100 + 111/1000 +.....n పదాలు]

9తో గుణించి భాగిస్తే...

= 5/9[9/10 + 99/100 + 999/1000 +.....n పదాలు]

= 5/9[(1– 1/10) + (1– 1/100) + (1– 1/1000) +.....n పదాలు)]

= 5/9[1 + 1 + 1 +.....n పదాలు) – (1/10 + 1/100 + 1/1000 +.....n పదాలు)]

= 5/9[n–(1/10 + $1/10^2$ + $1/10^3$ +.....n పదాలు)]

$$= \frac{5}{9}\left[n-\frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n-\frac{1}{\cancel{10}}\times\frac{\cancel{10}}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{9n-\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{9}\right]$$

$$= \frac{5}{81}\left[9n-\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

3. 1.4 + 3.7 + 5.10 +..... శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తం కనుక్కోండి?

Sol:

దత్తశ్రేఢి 1.4 + 3.7 + 5.10 +.....

దత్తశ్రేఢిలో ప్రతి పదానికి రెండు కారణాంకాలు ఉన్నాయి.

ప్రతి పదంలోని మొదటి కారణాంకాలను వరుసగా రాస్తే..

1, 3, 5, 7, ... ఇవి అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి.

a = 1, d = 2

t_n = a+(n–1)d

= 1+(n–1)2

= 1 + 2n–2

= 2n – 1

ఇదేవిధంగా రెండో కారణాంకాలను వరుసగా రాస్తే..

4, 7, 10, ... అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి.

a = 4, d = 3

t_n = 4+(n–1)3

= 4 + 3n – 3

= 3n + 1

దత్త శ్రేఢిలో nవ పదం T_n = (2n–1) (3n+1)

$=6n^2 – n – 1$

దత్త శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తం $S_n = \Sigma T_n$

$= \Sigma(6n^2 – n – 1)$

$= (6\Sigma n^2 – \Sigma n – \Sigma 1)$

$$= \frac{\cancel{6}n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} - \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)-n(n+1)-2n}{2}$$

$$\frac{n}{2}\left[2(n+1)(2n+1)-(n+1)-2\right]$$

$$\frac{n}{2}\left[4n^2+2n+4n+2-n-1-2\right]$$

$$\frac{n}{2}\left[4n^2+5n-1\right]$$

4. (b+c), (c+a), (a+b)లు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే.. $1/a^2$, $1/b^2$, $1/c^2$లు కూడా హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటాయని చూపించండి?

Sol:

(b+c), (c+a), (a+b)లు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే.. 1/b+c,

1/c+a, 1/a+bలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

పదాంతరం $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$$

$$\frac{b+\cancel{c}-\cancel{c}-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c+\cancel{a}-\cancel{a}-b}{(c+a)(a+b)}$$

$$\frac{b-a}{\cancel{(c+a)}(b+c)} = \frac{c-b}{\cancel{(c+a)}(a+b)}$$

$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$$

(a+b) (b–a) = (b+c) (c–b)

(or)

(b+a) (b–a) = (c+b) (c–b)

$b^2 - a^2 = c^2 - b^2$

$2b^2 = a^2 + c^2$

∴ a^2, b^2 c^2లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

∴ $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ లు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటాయి.

5. 1/12, 1/42 ల మధ్య 4 హరాత్మక మధ్యమాలు ఉంచండి?

Sol:

1/12, 1/42ల మధ్య హరాత్మక మధ్యమాలు = $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$ అనుకొంటే..

∴ $\frac{1}{12}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{42}$ అనేది హరాత్మక శ్రేఢి.

హరాత్మక శ్రేఢిలోని విలోమాలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి. కాబట్టి

12, x_1, x_2, x_3, x_4, 42లు అంకశ్రేఢి.

a = 12

$t_6 = 42$

a + 5d = 42

12 + 5d = 42

5d = 42 – 12

5d = 30

d = 30/5 = 6

∴ x_1 = a+d

= 12+6 = 18

x_2 = a+2d = 12+2×6 = 24

x_3 = a+3d = 12+3×6 = 30

x_4 = a+4d = 12+4×6 = 36

∴ అంకశ్రేఢి = 12, 18, 24, 30, 36, 42

∴ హరాత్మక శ్రేఢి = 1/12, 1/18, 1/24, 1/30, 1/36, 1/42

హరాత్మక మధ్యమాలు = 1/18, 1/24, 1/30, 1/36

6. రెండు సంఖ్యల A.M., G.M., H.M.,లు వరుసగా A, G, H అయితే $A \geq G \geq H$ అని చూపించండి?

Sol:

రెండు సంఖ్యలు = a, b అనుకొంటే..

a, bల అంకమధ్యమం (A.M) = A = a+b/2

a, bల గుణమధ్యమం (G.M) = $G = \sqrt{ab}$

a, bల హరాత్మక మధ్యమం (H.M) = $H = \frac{2ab}{a+b}$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{ab}}{1}$$

$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$A - G = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

∴ $A - G \geq 0$

$A \geq G$ —— (1)

$$G - H = \frac{\sqrt{ab}}{1} - \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2\sqrt{ab}.\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left[a+b-2\sqrt{ab}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left[\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \quad (\because a, b \text{ లు ధనాత్మకాలు})$$

∴ $G - H \geq 0$

$G \geq H$ ____ (2)

(1), (2)ల నుంచి $A \geq G \geq H$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఒక అంకశ్రేఢిలో 8వ పదం 17, 19వ పదం 39 అయితే 25వ పదం కనుక్కోండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో 8వ పదం $t_8 = 17$

a + 7d = 17 _____ (1)

అంకశ్రేఢిలో 19వ పదం $t_{19} = 39$

a + 18d = 39 _____ (2)

(1), (2)లను సాధిస్తే..

$\cancel{a} + 7d = 17$

$\cancel{a} + 18d = 39$

$- \quad - \quad -$

తీసివేస్తే $-11d = -22$

$d = 22/11 = 2$

(1) నుంచి $a + 7d = 17$

$a + 7(2) = 17$

$a = 17 - 14$

$a = 3$

అంకశ్రేఢిలో 25వ పదం $t_{25} = a + 24d$

$= 3 + 24(2)$

$= 3 + 48$

$= 51$

2. 4, 64ల మధ్య 3 గుణమధ్యమాలు ఉంచండి?

Sol:

4, 64ల మధ్య గుణమధ్యమాలు = g_1, g_2, g_3 అనుకొంటే..

$\therefore$ శ్రేఢి = $4, g_1, g_2, g_3, 64$(గుణశ్రేఢి)

$a = 4$

$t_5 = 64$

$ar^4 = 64$

$4r^4 = 64$

$r^4 = 64/4$

$r^4 = 16$

$r^4 = 2^4$

$\therefore r = 2$

$a = 4, r = 2$ అయితే

$g_1 = ar = 4 \times 2 = 8$

$g_2 = ar^2 = 4 \times 2^2 = 16$

$g_3 = ar^3 = 4 \times 2^3 = 32$

$\therefore$ 4, 6ల మధ్య గుణమధ్యమాలు = 8, 16, 32

3. అంకశ్రేఢిలో మొదటి 'n' పదాల మొత్తం $2n + 3n^2$ అయితే 'r'వ పదాన్ని కనుక్కోండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తం $S_n = 2n + 3n^2$

'n'వ పదం $t_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n + 3n^2) - [2(n-1) + 3(n-1)^2]$

$= (2n + 3n^2) - [2n - 2 + 3(n^2 - 2n + 1)]$

$= \cancel{2n} + \cancel{3n^2} - \cancel{2n} + 2 - \cancel{3n^2} + 6n - 3$

అంకశ్రేఢిలో 'n'వ పదం = $6n - 1$

$\therefore$ అంకశ్రేఢిలో 'r'వ పదం = $6r - 1$

4. m, nల మధ్య g_1, g_2, g_3, గుణమధ్యమాలుంటే... $g_1 g_3 = g_2^2 = mn$ అని చూపించండి?

Sol.

గుణశ్రేఢి = m, g_1, g_2, g_3, n

నిష్పత్తి సమానం కాబట్టి

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \frac{t_5}{t_4}$$

$$\frac{g_1}{m} = \frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2} = \frac{n}{g_3}$$

మొదటి, చివరివాటి నుంచి

$$\therefore \frac{g_1}{m} = \frac{n}{g_3}$$

$g_1 g_3 = mn$ —— (1)

మధ్య పదాల నుంచి

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2}$$

$g_2^2 = g_1 g_3$ —— (2)

(1), (2)ల నుంచి

$g_1 g_3 = g^2_2 = mn$

5. ఒక అంకశ్రేఢిలోని మూడు వరుస పదాల మొత్తం, లబ్ధాలు వరుసగా 12, 48 అయితే.. ఆ పదాలను రాయండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదాలు = $a-d, a, a+d$ అనుకొంటే..

వాటి మొత్తం = 12

$a - d + a + a + d = 12$

$3a = 12$

$a = 12/3$

$a = 4$

లబ్ధం = 48

$(a-d)\, a\, (a+d) = 48$

$a(a^2 - d^2) = 48$

$4(4^2 - d^2) = 48$

$16 - d^2 = 48/4$

$16 - 12 = d^2$

$d = \sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore a = 4, d = 2$ అయితే మూడు వరుస పదాలు = 2, 4, 6

$a = 4, d = -2$ అయితే మూడు వరుస పదాలు = 6, 4, 2

6. అంకశ్రేఢిలో 7వ పదానికి 7 రెట్లు, 11వ పదానికి 11 రెట్లకు సమానమైన 18వ పదం సున్న అని చూపండి?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో 7వ పదానికి 7 రెట్లు = 11వ పదానికి 11 రెట్లు

$7\, t_7 = 11\, t_{11}$

$7(a+6d) = 11(a + 10d)$

$7a + 42d = 11a + 110d$
$42d - 110d = 11a - 7a$
$-68d = 4a$
$4a + 68d = 0$
$4(a + 17d) = 0$
(or)
$a + 17d = 0$
$t_{18} = 10$
∴ అంకశ్రేఢిలో 18వ పదం = 0

1 మార్కు ప్రశ్నలు

1. $\frac{-2}{7}$, x, $\frac{-7}{2}$ వరుస సంఖ్యలు గుణశ్రేఢిలో ఉంటే x విలువెంత?

Sol:

$\frac{-2}{7}$, x, $\frac{-7}{2}$ గుణశ్రేఢిలో ఉన్నాయి కాబట్టి

సామాన్య నిష్పతి $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$

$$\frac{x}{\frac{-2}{7}} = \frac{\frac{-7}{2}}{x}$$

$$x^2 = \left(\frac{-7}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{7}\right)$$

$$= \frac{\cancel{7}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{7}}$$

$x = \sqrt{1}$
$x = \pm 1$

2. 5, 2, –1, ... అంకశ్రేఢిలో ఎన్నో పదం –28 అవుతుంది?

Sol:

అంకశ్రేఢి = 5, 2, –1, ...
$a = 5$
$d = 2 - 5 = -3$
'n'వ పదం $t_n = -28$
$a + (n-1)d = -28$
$5 + (n-1)(-3) = -28$
$5 - 3n + 3 = -28$
$8 - 3n = -28$
$8 + 28 = 3n$
$3n = 36$
$n = 36/3$
$n = 12$
∴ శ్రేఢిలో 12వ పదం –28 అవుతుంది.

3. గుణశ్రేఢి సామాన్య నిష్పత్తి –4/5 అనంతపదాల మొత్తం 80/9 అయితే మొదటి పదమెంత?

Sol:

గుణశ్రేఢి సామాన్య నిష్పత్తి $r = -4/5$
అనంత పదాల మొత్తం $S_{\infty} = 80/9$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{80}{9}$$

$$\frac{a}{1-\left(\frac{-4}{5}\right)} = \frac{80}{9}$$

$$\frac{a}{1+\frac{4}{5}} = \frac{80}{9}$$

$$\frac{a}{\frac{9}{5}} = \frac{80}{9}$$

$$a = \frac{\overset{16}{\cancel{80}}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{\cancel{5}}$$

$a = 16$

4. ఒక అంకశ్రేఢిలో $l = 8$, $n = 8$, $S_8 = -20$ అయితే a విలువెంత?

Sol:

అంకశ్రేఢిలో $l = 8$
$n = 8$
$S_8 = -20$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \qquad S_8 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}}(a + 8)$$

$-20 = 4(a+8)$
$-20 = 4a + 32$
$4a = -20 - 32$ $\qquad 4a = -52$

$$a = \frac{-52}{4}$$

$a = -13$

5. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots$ శ్రేఢిలో 10వ పదాల మొత్తమెంత?

Sol:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots$ 10 పదాలు
$a = 1$
$r = 2, n = 10$

10 పదాల మొత్తం $S_{10} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$$= \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1$$

6. $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \ldots\ldots$ శ్రేఢిలో 8వ పదం రాయండి?

Sol:

$\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \ldots\ldots$ శ్రేఢిలో నిష్పత్తి సమానం కాబట్టి ఇది గుణశ్రేఢి.

$a = \sqrt{3}$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

8వ పదం $t_8 = ar^7$
$= \sqrt{3}(\sqrt{2})^7$

రేఖాగణితం

సరూపం: ఒకే ఆకారం ఉన్న పటాలను సరూపపటాలు అంటారు. ఒకే ఆకారం ఉన్న త్రిభుజాలను సరూప త్రిభుజాలు అంటారు. సరూప తకు గుర్తు '~'

సరూప త్రిభుజ ధర్మాలు: రెండు త్రిభుజాలలో

1) అనురూప కోణాలు సమానమైనా, లేదా

2) అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉన్నా.. వాటిని సరూప త్రిభుజాలు అంటారు.

త్రిభుజాల సరూపత తుల్య సంబంధం:

a) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ (పరావర్తన ధర్మం)

b) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అయితే $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ (సౌష్టవ ధర్మం)

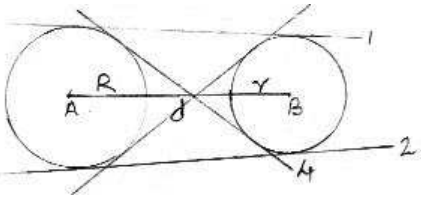
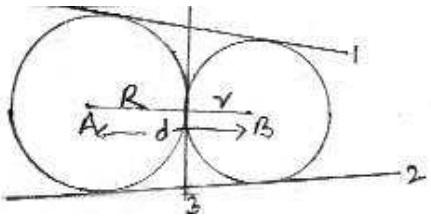
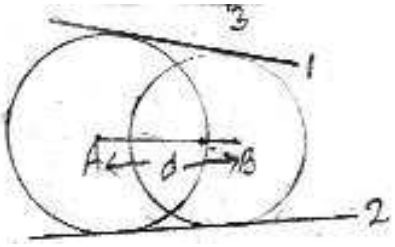
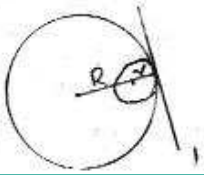
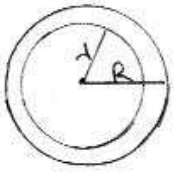
c) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\Delta DEF \sim \Delta XYZ$ అయితే $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$ అవుతుంది(సంక్రమణ ధర్మం)

వృత్తంనకు స్పర్శరేఖ: ఒక సరళరేఖ ఒక వృత్తాన్ని ఒకే బిందువు వద్ద ఖండిస్తే, దాన్ని స్పర్శరేఖ అంటారు.

ఛేదనరేఖ: ఒక సరళరేఖ ఒక వృత్తాన్ని రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దాన్ని ఛేదనరేఖ అంటారు.

ముఖ్యాంశాలు:

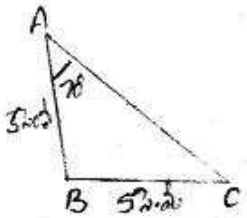
1. ఒక వృత్తాన్ని ఒక స్పర్శరేఖ ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది లేదా స్పర్శిస్తుంది.
2. ఒక రేఖ ఒక వృత్త వ్యాసార్ధం చివరి బిందువుకు లంబంగా ఉన్నచో ఆ రేఖ ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.
3. ఒక వృత్తానికి వెలుపల ఉన్న బిందువు నుంచి గీయదగు స్పర్శ రేఖల పొడవులు సమానం.
4. రెండు వృత్తాలు స్పర్శించుకొన్న వాటి కేంద్రగామి, స్పర్శబిందువు గుండా పోతుంది.
5. ఒకే వృత్తఖండంలోని కోణాలు సమానం.
6. చక్రీయ చతుర్భుజంలో అభిముఖ కోణాలు సమానం.
7. PAB ఛేదన రేఖ వృత్తాన్ని A, Bల వద్ద ఖండించినది. PT స్పర్శరేఖ అయిన $PA.PB=PT^2$.
8. రెండు వృత్తవ్యాసార్ధాలు R, r అనుకొనండి. వాటి కేంద్రాల మధ్య దూరం 'd' యానిట్లు

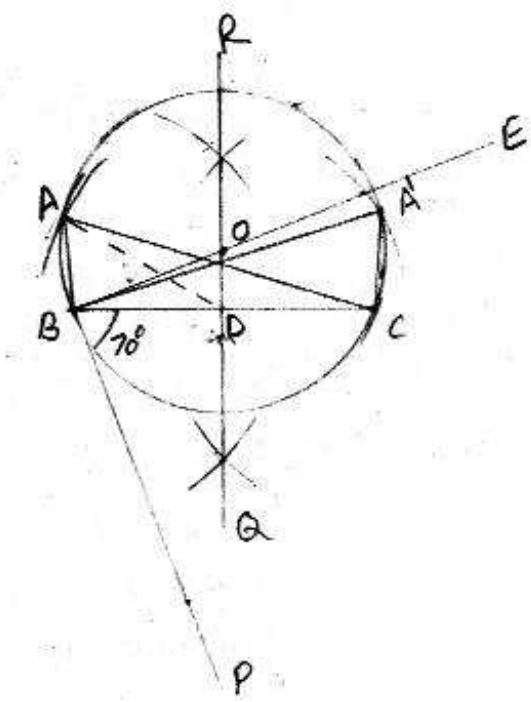
క్ర.సం	పటం పేరు	పటం	నియమం	స్పర్శరేఖల సంఖ్య
1.	అఖండిత వృత్తాలు		$d > R + r$	మొత్తం స్పర్శరేఖలు=4. రెండు ప్రత్యక్ష, రెండు తిర్యక్ స్పర్శ రేఖలు గీయొచ్చు
2.	బాహ్యంగా స్పర్శించే వృత్తాలు		$d = R + r$	మొత్తం స్పర్శరేఖలు=3. రెండు ప్రత్యక్ష, ఒకటి ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖను గీయొచ్చు
3.	ఖండిత వృత్తాలు		$d < R + r$ లేదా $d > R - r$	మొత్తం స్పర్శరేఖలు=2. రెండు ప్రత్యక్ష స్పర్శరేఖలు మాత్రమే గీయగలం
4.	అతఃస్పర్శ వృత్తాలు		$d = R - r$	ఒక ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ గీయవచ్చు.
5.	అంతరంగా స్పర్శించని వృత్తాలు (ఏకకేంద్ర వృత్తాలు)		$R - r > d$	స్పర్శరేఖలు గీయలేం.

5 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. BC = 5 సెం.మీ., ∠A = 70°, మధ్యగతం AD=3 సెం.మీ ఉండేట్లు ABC త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి?

చిత్తుపటం





నిర్మాణ క్రమం:

1. BC = 5 సెం.మీ రేఖాఖండం గీసాను.
2. BCపై ∠PBC = 70° ఉండేట్లు BPను గీసాను.
3. BPకు B వద్ద లంబరేఖ BEని గీసాను.
4. BC లంబసమద్విఖండన రేఖ QRను గీసాను.
5. BE, QRల ఖండన బిందువు 'O'ను గుర్తించాను.
6. 'O' కేంద్రంగా OB = OC వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని గీసాను.
7. BC మధ్యబిందువు D నుంచి 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని A, A'ల వద్ద ఖండించాను.
8. AB, AC, A'Cలను కలిపాను.
9. కావాల్సిన ΔABC, ΔA'BCలు ఏర్పడ్డాయి.

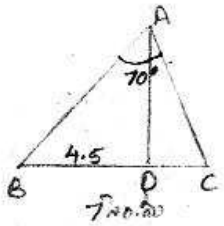
ఉపపత్తి: BC = 5 సెం.మీ.

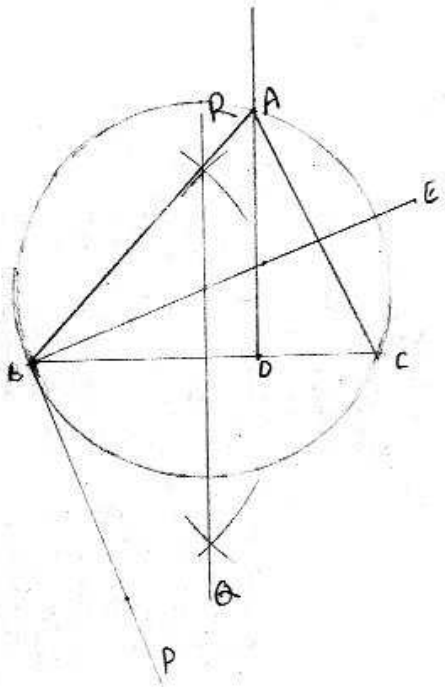
∠CBP = ∠CAB = ∠CA'B = 70° (ఏకాంతరవృత్త ఖండ సిద్ధాంతం)

మధ్యగతరేఖ AD=3సెం.మీ.

2. BC = 7 సెం.మీ., ∠A = 70°, A నుంచి BCకి గీసిన లంబపాదం D, B నుంచి 4.5 సెం.మీ దూరంలో ఉన్న ABC త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి?

చిత్తుపటం





నిర్మాణ క్రమం:

1. BC = 7 సెం.మీ రేఖాఖండం గీసాను.
2. BCపై ∠PBC = 70° ఉండేట్లు BPని గీసాను.
3. BP కు B వద్ద లంబరేఖ BEని గీసాను.
4. BC లంబసమద్విఖండనరేఖ QR గీసాను.
5. BE, QRల ఖండన బిందువు 'O'గా గుర్తించాను.
6. 'O' కేంద్రంగా OB = OC వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని గీసాను.
7. BC పై BD = 4.5 సెం.మీ. ఉండేట్లు Dను గుర్తించాను.
8. BC పై D వద్ద లంబాన్ని గీయగా అది వృత్తాన్ని A వద్ద ఖండించింది.
9. AB, ACలను కలిపాను.
10. కావాల్సిన ΔABC ఏర్పడింది.

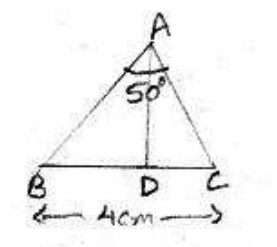
ఉపపత్తి: BC = 7 సెం.మీ.

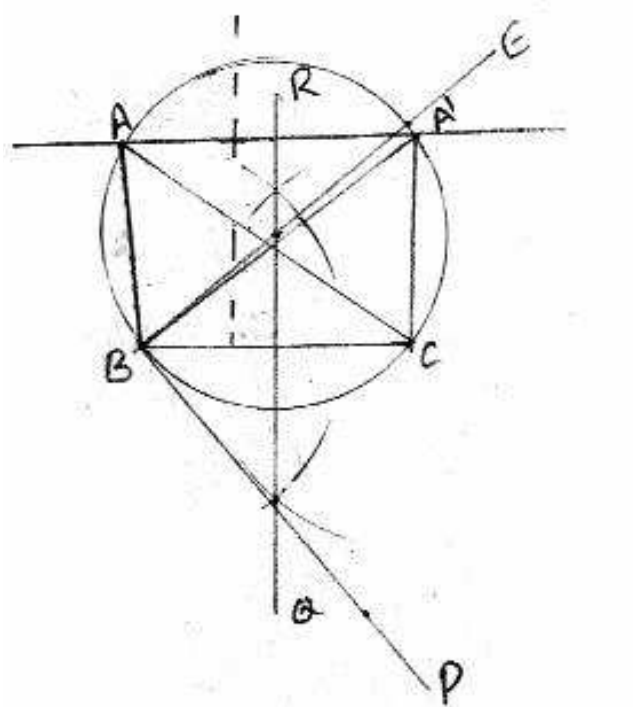
∠CBP = ∠CAB = 90° (ఏకాంతరవృత్త ఖండ సిద్ధాంతం)

A నుంచి Bకు గీసిన లంబపాదం D, B నుంచి 4.5 సెం.మీ. దూరంలో ఉంది.

3. BC = 4 సెం.మీ., ∠A = 50°, A నుంచి BCకి గీసిన లంబం 3 సెం.మీ అయ్యేట్లు ABC త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి?

చిత్తుపటం





నిర్మాణ క్రమం:

1. BC = 4 సెం.మీ రేఖాఖండం గీసాను.
2. BCపై ∠PBC = 50° ఉండునట్లు BPను గీసాను.
3. BP కు B వద్ద లంబరేఖ BEని గీసాను.
4. BC లంబసమద్విఖండనరేఖ QR గీసాను.
5. BE, QRల ఖండన బిందువును 'O'గా గుర్తించాను.
6. 'O' కేంద్రంగా OB = OC వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని గీసాను.
7. BC కు 3 సెం.మీ. దూరంలో ఒక సమాంతర రేఖను గీయగా అది వృత్తాన్ని A, A'ల వద్ద ఖండించింది.
8. AB, AC లను కలిపాను. A'B, A'Cలను కలిపాను.
9. కావాల్సిన ABC, A'BC లు ఏర్పడ్డాయి.

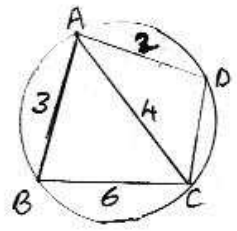
ఉపపత్తి: BC = 4 సెం.మీ.

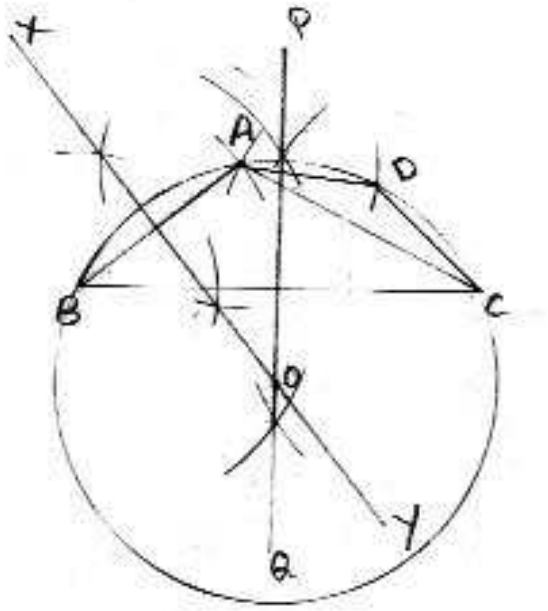
∠CBP = ∠CAB = ∠CA'B = 50° (ఏకాంతరవృత్త ఖండ సిద్ధాంతం)

A నుంచి BCకి లంబం = 3 సెం.మీ.

4. AB = 3 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ., AC= 4 సెం.మీ, AD=2 సెం.మీ ఉండేట్లు ABCD చక్రీయ చతుర్భుజాన్ని నిర్మించండి?

చిత్తుపటం





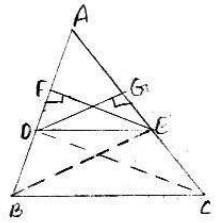
నిర్మాణ క్రమం:

1. BC = 6 సెం.మీ రేఖాఖండం గీసాను.
2. B నుంచి 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం గీసాను.
3. C నుంచి 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో మొదటి చాపంను A వద్ద ఖండించాను.
4. AB, AC లను కలపగా ABC త్రిభుజం ఏర్పడింది.
5. BC లంబసమద్విఖండన రేఖ PQ ను గీసాను.
6. AB లంబసమద్విఖండన రేఖ XYను గీసాను.
7. PQ, XYల ఖండన బిందువు 'O'గా గుర్తించాను.
8. OA=OB=OC వ్యాసార్ధంతో 'O' కేంద్రంగా వృత్తాన్ని గీసాను.
9. A నుంచి 2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని D వద్ద ఖండించాను.
10. AD, CDలను కలిపాను.
11. ABCD చక్రీయ చతుర్భుజం ఏర్పడింది.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం (థేల్స్ సిద్ధాంతం) రాసి నిరూపించండి?

సిద్ధాంతం: ఒక త్రిభుజంలోని ఒక భుజానికి సమాంతర రేఖను గీస్తే.. అది మిగిలిన రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో ఖండిస్తుంది.



దత్తాంశం: ΔABC లో $DE \| BC$, DE, ABని Dవద్ద AC ని E వద్ద ఖండిస్తుంది.

సారాంశం: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

నిర్మాణం: BE, CDలను కలపాలి. $EF \perp BA$, $DG \perp AC$

ఉపపత్తి: ΔADE, ΔBDE లు అంటే.. ADE, BDE వైశాల్యాలు.

$$\frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EF}{\frac{1}{2} \times DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ఇదేవిధంగా

$$\frac{\Delta ADE}{\Delta CDE} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

కాని ΔBDE, ΔCDEలు ఒకే భూమి DEపైన ఒకే సమాంతర రేఖలు DE, BCల మధ్య ఉన్నాయి. కాబట్టి వాటి వైశాల్యాలు సమానం.

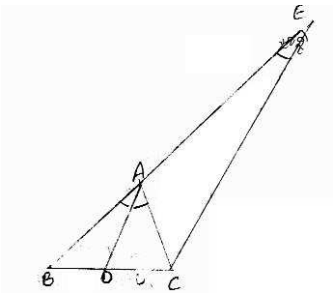
ΔBDE, ΔCDE

(1), (2)ల నుంచి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

2. శీర్షకోణ సమద్విఖండనా రేఖా సిద్ధాంతం రాసి, నిరూపించండి?

సిద్ధాంతం: ఒక త్రిభుజంలోని శీర్షకోణ సమద్విఖండన రేఖ, ఎదుటి భుజాన్ని మిగతా రెండు భుజాల నిష్పత్తిలో విభజించాలి.



దత్తాంశం: ΔABC లో $\angle BAC$ సమద్విఖండన రేఖా BC ని D వద్ద ఖండిస్తుంది. $\angle BAD = \angle DAC$

సారాంశం: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

నిర్మాణం: DAకు సమాంతరంగా CEని గీయండి. అది BAని పొడిగించగా Eవద్ద ఖండిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $CE \| DA$, AC తిర్యగ్రేఖ కాబట్టి $\angle CAD$, $\angle ACE$ (ఏకాంతర కోణాలు) .....(1)

$DA \| CE$, BE తిర్యగ్రేఖ కాబట్టి $\angle BAD$, $\angle AEC$ (సదృశ్య కోణాలు) .....(2)

కాని దత్తాంశం $\angle BAD = \angle DAC$ .....(3)

(1), (2), (3)ల నుంచి $\angle ACE = \angle AEC$

$\therefore AC = AE$ ($\because$ సమాన కోణాలను ఎదురుగా ఉన్న భుజాలు త్రిభుజంలో సమానం)

$\angle BCE$లో $DA \| CE$

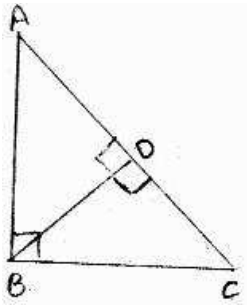
ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} (\because AE = AC)$$

3. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం రాసి, నిరూపించండి?

సిద్ధాంతం: ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీది వర్గం, మిగిలిన రెండు భుజాల మీది వర్గాల మొత్తానికి సమానం.



దత్తాంశం: ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం.

సారాంశం: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

నిర్మాణం: $BD \perp AC$

ΔADB	ΔABC
$\angle A =$	$\angle A$
$\angle ADB =$	$\angle ABC = 90°$

ఉపపత్తి: $\Delta ADB \cong \Delta ABC$ (కో.కో. సరూపత)

సరూప త్రిభుజాలలో అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం కాబట్టి

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$\therefore AB^2 = AD.AC$ .....(1)

ఇదేవిధంగా ΔBDE, ΔABC సరూప త్రిభుజాల నుంచి

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$$

$BC^2 = AC.DC$ .....(2)

(1), (2)లను కలుపగా

$AB^2 + BC^2 = AD.AC + AC.DC$

$= AC\,(AD + DC)$

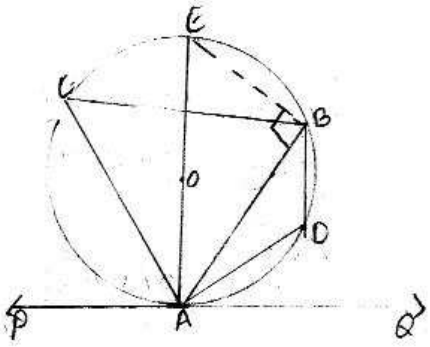
$= AC.\,AC$ ($\because$ $AD + DC = AC$ పటం నుంచి)

$= AC^2$

$\therefore\ AC^2 = AB^2 + BC^2$

4. ఏకాంతర వృత్తఖండ సిద్ధాంతాన్ని రాసి, నిరూపించండి?

సిద్ధాంతం: ఒక వృత్తానికి ఒక స్పర్శరేఖను గీసిన, స్పర్శబిందువు ద్వారా గీసిన జ్యా, ఆ స్పర్శరేఖతో చేసే కోణాల ఏకాంతరవృత్త ఖండంలోని కోణాలకు సమానం.



దత్తాంశం: 'O' కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తం PQ స్పర్శరేఖ వృత్తాన్ని, A వద్ద తాకుతుంది. A స్పర్శబిందువు AB జ్యా. C, D లు ABకు ఇరువైపుల ఉన్న బిందువులు.

సారాంశం: 1) $\angle BAP = \angle ADB$

2) $\angle BAQ = \angle ACB$

నిర్మాణం: AOE వ్యాసం E, B లను కలపండి.

ఉపపత్తి: $\angle ABE = 90°$ (అర్ధవృత్తంలోని కోణం)

ΔABEలో $\angle AEB + \angle EAB = 90°$ .....(1)

$\angle EAQ = 90°$ ($\because$ $EA \perp PQ$)

$\angle EAB + \angle BAQ = 90°$ .....(2)

(1), (2)ల నుంచి

$\angle AEB + \cancel{\angle EAB} = \cancel{\angle EAB} + \angle BAQ$

$\therefore\ \angle AEB = \angle BAQ$ .....(3)

కాని $\angle AEB = \angle ACB$ (ఒకే వృత్తఖండంలోని కోణాలు) .....(4)

(3), (4) ల నుంచి

$\boxed{\angle BAQ = \angle ACB}$

ADBC చక్రీయ చతుర్భుజం.

కాబట్టి

$\angle ACB + \angle BDA = 180°$

$\angle BDA = 180° - \angle ACB$

$= 180° - \angle BAQ$ ($\because$ $\angle BAQ = \angle ACB$)

$= \angle BAP$

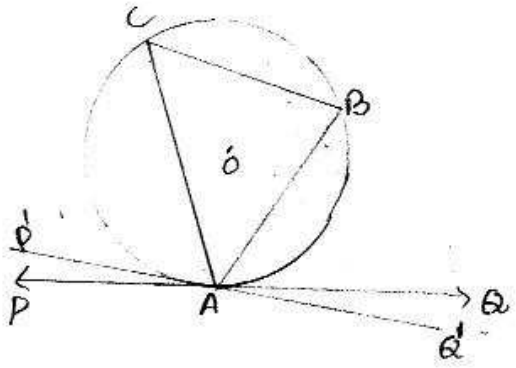
$\boxed{\therefore \angle BAP = \angle BDA}$

5. ఏకాంతర వృత్తఖండ సిద్ధాంతం విపర్యయాన్ని నిర్వచించి, నిరూపించండి?

సిద్ధాంతం: ఒక వృత్తంలో ఒక జ్యా చివరి బిందువు నుంచి ఒక సరళ రేఖ గీసిన, అది జ్యాతో చేసే కోణాలు ఆ జ్యాతో ఏకాంతర వృత్త ఖండంలో చేసే కోణాలకు సమానమైనా ఆ సరళ రేఖ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ.

దత్తాంశం: 'O' కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తంలో

AB జ్యా, C అనేది ABకి ఒకవైపు ఉన్న బిందువు. A నుంచి PAQ సరళరేఖ $\angle BAQ = \angle ACB$



సారాంశం: A బిందువు వద్ద వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ PAQ.

నిర్మాణం: PAQ స్పర్శరేఖ కాకుంటే.. A వద్ద వృత్తానికి P'AQ' అనే స్పర్శరేఖను గీయండి.

ఉపపత్తి: A వద్ద P'AQ' ఒక స్పర్శరేఖ కాబట్టి ఏకాంతర వృత్తఖండ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$\angle BAQ' = \angle ACB$ .....(1)

$\angle BAQ = \angle ACB$ (దత్తాంశం).....(2)

(1), (2)ల నుంచి

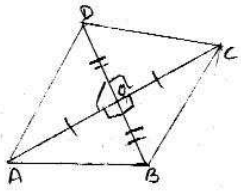
$\angle BAQ = \angle BAQ'$

AQ' కిరణం AQ కిరణంతో ఏకీభవించకున్న ఇది అసంభవం. కాబట్టి P'AQ' తప్పక PAQతో ఏకీభవించాలి. అంటే.. PAQ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ.

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ABCD సమచతుర్భుజంలో $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2$ అని చూపండి?

Sol. ABCD ఒక సమచతుర్భుజం. AC, BD కర్ణాలు 'O' వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి.



$\Delta AOD \angle AOD = 90°$

$AD^2 = OA^2 + OD^2$

$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$

$= \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}$

$AD^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{4}$

$4AD^2 = AC^2 + BD^2$

$AD^2 + AD^2 + AD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

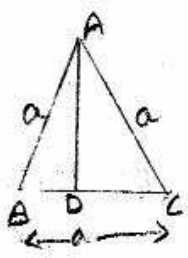
($\because$ AD = BC = CD = AB)

2. సమబాహు త్రిభుజ భుజం 'a' అయితే (1) ఎత్తు కొలత $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

(2) వైశాల్యం $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ అని రుజువు చేయండి?

Sol. ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం.

AB= BC = CA= a యూనిట్లు.



ΔADCలో $\angle D = 90°$

$AD^2 = AC^2 - DC^2$

$AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$= \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$AD = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

ఎత్తు $AD = \sqrt{\frac{3}{2}a}$

ΔABC వైశాల్యం = 1/2 × భూమి × ఎత్తు

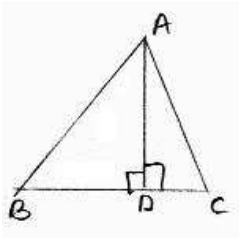
$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ చ.యూనిట్లు.

3. ABC త్రిభుజంలో AD, BC పైకి గీసిన లంబం $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ అని చూపండి?

Sol. ΔABCలో $AD \perp BC$



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

ΔABDలో

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$AB^2 - BD^2 = AD^2$ .....(1)

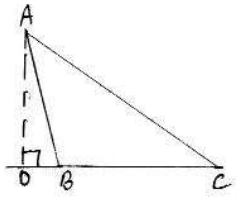
ΔACDలో $AD^2 = AC^2 - CD^2$ .....(2)

(1), (2) ల నుంచి

$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

4. ABC అను అధికకోణ త్రిభుజంలో $\angle B$ అధికకోణం. $AD \perp BC$ అయిన $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD.BC$ అని చూపండి?

Sol. ΔABC అధికకోణ త్రిభుజం



$\angle D = 90°$

ΔADCలో

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$= AD^2 + (BD+BC)^2$

$AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BD.BC$ .....(1)

ΔADB నుంచి $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$AB^2 - BD^2 = AD^2$.....(2)

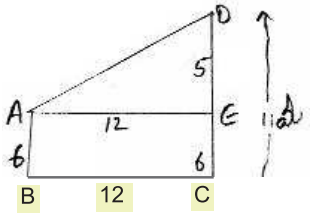
(2)ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$AC^2 = AB^2 - BD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BD.BC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD.BC$

5. ఒక సమతలంలో 6మీ., 11మీ ఎత్తు ఉన్న రెండు స్తంభాలు నిలబెట్టారు. వాటి అడుగుభాగాల దూరం 12మీ. అయితే వాటి కొనల మధ్య దూరం ఎంత?

Sol. AB = 6మీ



CD = 11మీ

AB = CE = 6 కాబట్టి

DE = 11– 6=5

BC = AE = 12మీ

ΔAEDలంబకోణ త్రిభుజంలో

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

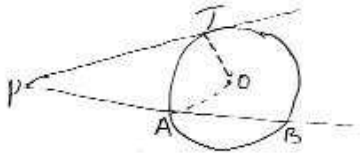
$= 12^2 + 5^2$

$AD = \sqrt{169}$

= 13 మీ.

రెండు స్తంభాల కొనల మధ్య దూరం = 13 మీ.

6. PAB ఒక ఛేదన రేఖ ఒక వృత్తాన్ని A, Bల వద్ద ఖండిస్తున్నప్పుడు PT ఒక స్పర్శరేఖాఖండం అయితే $PT^2 = PA.PB$ అని చూపండి?



దత్తాంశం: PAB ఛేదనరేఖ, PT స్పర్శరేఖ

సారాంశం: $PT^2 = PA.\ PB$

నిర్మాణం: OP, OT, OAలను కలపండి

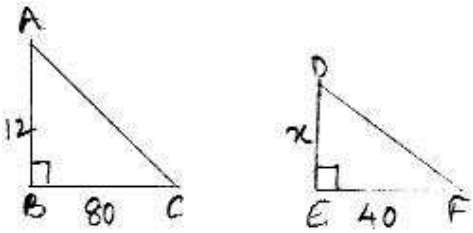
ఉపపత్తి: $PA.PB = OP^2 - OA^2$

$= OP^2 - OT^2$ (OA = OT = వ్యాసార్ధాలు)

$= PT^2$

7. 12 సెం.మీ పొడవు ఉన్న కర్రముక్కను నిట్టనిలువుగా నిలబెట్టినపుడు దాని నీడ నేలపై 80సెం.మీ. ఉంది. అదే సమయంలో ఒక స్తంభం నీడ నేలపై 40 సెం.మీ. ఆ స్తంభం ఎత్తు కనుక్కోండి?

Sol. సూర్యకిరణాలు వస్తువులపై ఒక సమయంలో చేయు కోణం సమానం.



కర్రముక్క = AB, దాని నీడ = BC

AB = 12 మీ. అయితే BC = 80 మీ.

పటాల నుంచి

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

కో.కో. సరూపకత ప్రకారం $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\therefore \frac{12}{x} = \frac{80}{40}$$

$$x = \frac{40 \times 12}{80}$$

x = 6 సెం.మీ.

∴ స్తంభం ఎత్తు = 6 సెం.మీ.

8. 25 మీ. పొడవు ఉన్న నిచ్చెన, భూమి నుంచి 20 మీ. ఎత్తులో ఉన్న భవనపు కిటికీకి తాకింది. నిచ్చెన అడుగుభాగం, భవనం నుంచి ఎంత దూరంలో ఉంది.

Sol. నిచ్చెన పొడవు AC = 25 మీ.

భవనం కిటికీ ఎత్తు BC = 20 మీ.

నిచ్చెన అడుగు భాగం నుంచి భవనం అడుగు భాగానికి ఉన్న దూరం = AB

ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

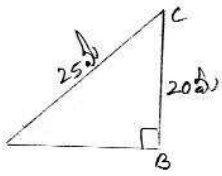
$25^2 = AB^2 + 20^2$

$AB^2 = 25^2 - 20^2$

$= 625 - 400$

$AB = \sqrt{225}$

AB = 15మీ.



9. ΔABCలో AB=AC; D, BCపై ఏదైనా ఒక బిందువు అయితే $AB^2 - AD^2 = BD.CD$ అని చూపండి?

Sol. ΔABCలో AB = AC

BCపై D ఒక బిందువు, $AE \perp BC$

ΔABCలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$AB^2 = BE^2 + AE^2$ .....(1)

ΔABCలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$AD^2 = DE^2 + AE^2$ .....(2)

(1), (2)ల నుంచి

$AB^2 - AD^2 = BE^2 + AE^2 - DE^2 - AE^2$

$= BE^2 - DE^2$

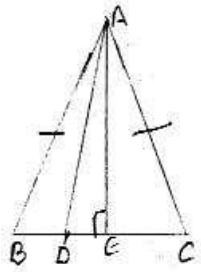
$= (BE+DE)\ (BE-DE)$

BE = CE కాబట్టి

$(CE + DE)\ (CE - DE)$

$(CE + DE)\ BD$

$AB^2 - AD^2 = CD.BD$



ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం కల వృత్తానికి దాని కేంద్రం నుంచి 5 సెం.మీ. దూరంలో ఉన్న బిందువు నుంచి ఒక స్పర్శరేఖను గీస్తే దాని పొడవెంత?

Sol. వ్యాసార్ధం OT = 3 సెం.మీ.

కేంద్రం నుంచి P కు ఉన్న దూరం OP = 5 సెం.మీ.

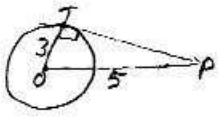
ΔOTP లంబకోణ త్రిభుజం. $\angle T = 90°$

$\therefore OP^2 = OT^2 + PT^2$

$5^2 = 3^2 + PT^2$

$PT = \sqrt{25-9} = 4$

స్పర్శరేఖ పొడవు = 4 సెం.మీ.



2. 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధాలు కల రెండు వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటే.. ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ పొడవు కనుగొనండి?

Sol. R = 6 సెం.మీ.

r = 5 సెం.మీ.

బాహ్యంగా స్పర్శించుకొన్నాయి కాబట్టి,

$d = R+r = 6+5 = 11$

ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{d^2-(R-r)^2}$

$\sqrt{11^2-(6-5)^2}$

$\sqrt{121-1} = \sqrt{120}$

$= 2\sqrt{30}$ సెం.మీ.

3. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం విపర్యయాన్ని ప్రతిపాదించండి?

ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలకు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ మూడో భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

4. రెండు బహుభుజాలు ఎప్పుడు సరూపాలవుతాయి?

రెండు బహుభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే..

1. వాటి అనురూప కోణాలు సమానం కావాలి
2. వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే అనుపాతంలో ఉండాలి.

5. 5 సెం.మీ., 7 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం ఉన్న రెండు వృత్తాలకు మూడు స్పర్శరేఖలు గీయగల్గిన వాటి కేంద్రాల మధ్య దూరమెంత?

రెండు వృత్తాలకు 3 స్పర్శరేఖలు గీయాలంటే.. అవి బాహ్యంగా స్పర్శించాలి. అంటే $d = R + r$

$\therefore$ కేంద్రాల మధ్య దూరం $d = 7 + 5 = 12$ సెం.మీ.

6. 3 సెం.మీ., 1 సెం.మీ వ్యాసార్ధాలుగా కల రెండు వృత్తాల కేంద్రాల మధ్య దూరం 5 సెం.మీ. అయితే వాటి తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ పొడవు కనుక్కోండి?

Sol. $R = 3$ సెం.మీ.

$r = 1$ సెం.మీ.

$d = 5$ సెం.మీ.

తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ పొడవు $= \sqrt{d^2-(R+r)^2}$

$= \sqrt{5^2-(3+1)^2} = \sqrt{25-16}$

3 సెం.మీ.

7. ఒక మనిషి 150 మీ తూర్పు దిశగా ప్రయాణించి తర్వాత ఉత్తరం వైపుకు 200మీ ప్రయాణించినా.. బయలుదేరిన స్థానం నుంచి అతను ఎంత దూరంలో ఉంటాడు?

Sol. AB = 150 మీ.

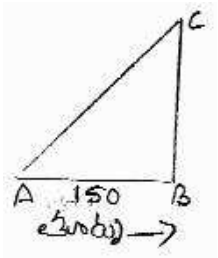
BC = 200 మీ.

లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 150^2 + 200^2$

$AC = \sqrt{62500}$



AC = 250 మీ.

8. అపల్లోనియస్ సిద్ధాంతం అంటే ఏమిటి?

ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మీది వర్గాల మొత్తం, మూడో భుజంలోని సగం వర్గం, దానిపై గీసి మధ్యగత రేఖ వర్గాల మొత్తానికి రెట్టింపుగా ఉంటుంది.

9. ఒక వృత్తంలో జ్యా AB, జ్యా CDలు E వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. AE = 6, EB = 8, CE = 4 అయితే DE పొడవు ఎంత?

Sol. $AE \times EB = CE \times ED$

$6 \times 8 = 4 \times ED$

$ED = \frac{6 \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{4}}$

$ED = 12.$

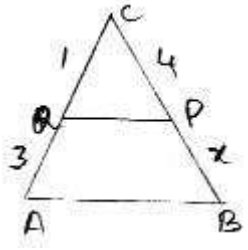
10. ΔABCలో PQ || AB; P, Qలు వరుసగా BC, CAలపై ఉన్నాయి. CQ: QA = 1: 3, CP = 4 అయితే BC పొడవు ఎంత?

Sol. ΔCABలో $PQ \| AB$

$\frac{CB}{CP} = \frac{CA}{CQ}$

$\frac{CB}{4} = \frac{4}{1}$

$\therefore CB = 16$



11. సమబాహు త్రిభుజం భుజం 6 సెం.మీ. అయితే దాని ఎత్తు, వైశాల్యం కనుక్కోండి?

Sol. a = 6

సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ సెం.మీ.

సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{3}{\cancel{6}}$

$= 9\sqrt{3}$ చ.సెం.మీ.

వైశ్లేషిక రేఖాగణితం

ముఖ్యాంశాలు:

1. వైశ్లేషిక రేఖాగణితం లేదా నిరూపక రేఖాగణితం కనుగొన్న శాస్త్ర వేత్త.. రెనెడెకార్టె.
2. సాధారణ సరళరేఖా సమీకరణం $ax + by + c = 0$
3. $ax + by + c = 0$, రేఖ వాలు $m = -a/b$
4. x-అక్షం వాలు = 0, y అక్షం వాలు నిర్వచించలేం.
5. $x=k$ రేఖ y-అక్షానికి సమాంతరంగా k యూనిట్ల దూరంలో ఉంటుంది. $y=k$ రేఖ x-అక్షానికి సమాంతరంగా k యూనిట్ల దూరంలో ఉంటుంది.
6. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖ వాలు

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

7. రెండు సరళరేఖల వాలులు సమానమైతే.. ఆ రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి. రెండు రేఖల వాలుల లబ్ధం -1 అయితే ఆ రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబరేఖలు అవుతాయి.
8. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ అయితే A, B ల మధ్య దూరం

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

9. ఆది బిందువు నుంచి (x, y) బిందువులకు మధ్య దూరం = $\sqrt{x^2 + y^2}$
10. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖ మధ్యబిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
11. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$లు త్రిభుజశీర్షాలు అయితే గురుత్వకేంద్రం = $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$
12. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$కలిపే రేఖాఖండాన్ని m:n నిష్పత్తిలో

a) అంతరంగా విభజించే.. బిందు నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

b) బాహ్యంగా విభజించే బిందు నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

13. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ త్రిభుజ శీర్షాలు అయిన త్రిభుజ వైశాల్యం $= 1/2|x_1 (y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$ చ.యూ.
14. $ax+by+c=0$కు సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖ $ax+by+K=0$
15. $ax+by+c=0$కు లంబంగా ఉండే సరళ రేఖ $bx-ay+K=0$

16. సరళరేఖా సమీకర సమీకరణాలు - వివరణ - విశ్లేషణ

సరళరేఖ వర్ణన	సరళరేఖా సమీకరణం	రూపం పేరు
1. మూలబిందువు గుండా పోతూ.. m వాలుగా గల సమీకరణం	$y = mx$	వాలు లేక ఉత్పలరూపం
2. వాలు m, y అంతరఖండం Cగా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణం	$y = mx+c$	వాలు-అంతరఖండ రూపం
3. వాలు m, బిందువు (x_1, y_1) గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణం.	$y-y_1 = m(x-x_1)$	వాలు-బిందు రూపం
4. x-అంతర ఖండం a, y-అంతర ఖండం bగా గల సరళరేఖా సమీకరణం	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	అంతరఖండాల రూపం
5. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖా సమీకరణం.	$(y-y_1)(x_2-x_1) = (x-x_1)(y_2-y_1)$ లేదా $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	రెండు బిందువుల రూపం

17. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు కావాలంటే.. A, B, Cలతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం సున్న అవ్వాలి.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. A (3, –5), B (5, 7)లను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉంటూ.. (2,–3) బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి?

Sol. A (3, –5), B (5, 7) బిందువులను కలిపే రేఖవాలు

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{7+5}{5-3} = \frac{12}{2} = 6$$

దత్త రేఖకు లంబంగా ఉండే రేఖ వాలు m_2 అనుకుంటే..

$m_1.m_2 = -1$
$6m_2 = -1$
$m_2 = -1/6$

(2, –3) బిందువు గుండా పోతూ $m_2 = -1/6$ వాలుగా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణం

$y - y_1 = m_2 (x - x_1)$
$y - (-3) = -1/6 (x-2)$
$y + 3 = -1/6 (x-2)$
$6y + 18 = -x + 2$
$x + 6y + 18 - 2 = 0$
$x + 6y + 16 = 0$

∴ కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం $x + 6y + 16 = 0$

2. (4, –3) బిందువు గుండా పోతూ నిరూపక అక్షాలపై చేసే అంతరఖండాల మొత్తం –1కు సమానం అవుతూ.. వ్యవస్థిత మయ్యే సరళరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి?

Sol. నిరూపక అక్షాలతో చేసే అంతర ఖండాలు = a, b అనుకుంటే..

∴ $a+b = -1$
$b = -1 - a$
$b = -(1 + a)$

అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖా సమీకరణం

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-(1+a)} = 1$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{(1+a)} = 1$$

పైరేఖ (4, 3) గుండా పోతుంది కాబట్టి

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{1+a} = 1$$

$$\frac{4+4a-3a}{a(1+a)} = 1$$

$a + 4 = a(1+a)$
$a + 4 = a + a^2$
$a^2 + a - a - 4 = 0$
$a^2 = 4$
$a = \sqrt{4} = \pm 2$

1. $a = 2$ అయితే $b = -(1+a)$
$= -3$

2. $a = -2$ అయితే $b = -(1-2)$
$= +1$

∴ $a = 2, b = -3$ అయితే, కావలసిన సరళరేఖ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

or

$3x - 2y = 6$

∴ $a = -2, b = 1$ అయితే, కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$$

$x - 2y = -2$

or

$x - 2y + 2 = 0$

3. (–3, 2), (6, 1)లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని y-అక్షం ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి?

Sol. (–3, 2), (6, 1) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని y-అక్షం P బిందువు వద్ద m:n నిష్పత్తిలో ఖండిస్తుంది అనుకుంటే..

(x_1, y_1), (x_2, y_2)లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని m:n నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు = $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

∴ y అక్షంపై x - నిరూపకం సున్న కాబట్టి $P = (0, y)$

$$(0, y) = \left(\frac{m(6) + n(-3)}{m+n}, \frac{m(1) + n(2)}{m+n}\right)$$

ప్రథమ నిరూపకాలను పోల్చగా

$$0 = \frac{6m - 3n}{m+n}$$

∴ $6m - 3n = 0$
$6m = 3n$

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

∴ y-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి = 1:2

4. x, y అక్షాలపై a+b = 2, ab= –3 లను తృప్తిపరిచే a, bలను అంతర ఖండాలుగా కలిగిన రేఖకు సమీకరణం కనుక్కోండి?

Sol. $a + b = 2$

$ab = -3$

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$= 2^2 - 4(-3)$

$= 4 + 12$

$= 16$

$\therefore a - b = \sqrt{16} = \pm 4$

case(i) $a - b = 4$ అయితే

$a + b = 2$

$2a = 6$

$a = 3$

$a = 3$ను $a + b = 2$లో ప్రతిక్షేపించగా..

$3 + b = 2$

$b = 2 - 3$

$b = -1$

$a = 3, b = -1$ అయితే సరళరేఖా సమీకరణం

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 1$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{1} = 1$$

$x - 3y = 3$

case (ii) $a - b = -4$ అయితే

$a + b = 2$

$2a = -2$

$a = -1$

అయితే,

$a + b = 2$

$-1 + b = 2$

$b = 2 + 1 = 3$

$a = -1, b = 3$ అయినా సరళరేఖా సమీకరణం

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1$$

$3x - y = -3$

5. (1, 2) (4, –3) లను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని సమద్విఖండన చేస్తూ వాలు 5/6గా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణం కనుక్కోండి?

Sol. ఇచ్చిన బిందువులు = A (1, 2), B(4, –3)

A, Bలను కలిపే రేఖాఖండాన్ని సమద్విఖండన చేసే బిందువు

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{2-3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

$\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ బిందువు గుండా పోతూ.. వాలు m=5/6గా గల సరళ రేఖా సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1/2 = 5/6 (x - 5/2)$

$$\frac{2y+1}{2} = \frac{5}{6}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{2y+1}{\cancel{2}} = \frac{5}{6}\left(\frac{2x-5}{\cancel{2}}\right)$$

$12y + 6 = 10x - 25$

$10x - 12y - 25 - 6 = 0$

$10x - 12y - 31 = 0$

కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం $10x - 12y - 31 = 0$

6. (p, –3), (1, 3), (5, –5)లు సరేఖీయ బిందువులైతే.. pను కనుక్కోండి?

Sol. A (p, 3), B(1, 3), C (5, –5)లు మూడు సరేఖీయ బిందువులైతే... వాటితో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం '0' అవుతుంది.

$\therefore \Delta ABC$ వైశాల్యం = 0

$1/2 |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = 0$

$1/2 |p(3+5) + 1(-5+3) + 5(-3-3)| = 0$

$1/2 |8p - 2 - 30| = 0$

$1/2 |8p - 32| = 0$

$\therefore 8p - 32 = 0$

$8p = 32$

$$p = \frac{\overset{4}{\cancel{32}}}{\cancel{8}}$$

$p = 4$

7. (4, –3) బిందువు గుండా పోతూ 2x–5y+4=0కు లంబంగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణం రాయండి?

Sol. ఇచ్చిన సరళరేఖ $2x - 5y + 4 = 0$

వాలు m = – x గుణకం/ y గుణకం = 2/5

2x–5y+4=0కు లంబంగా ఉండే రేఖ వాలు $m' = -1/m = -1/2/5 = -5/2$

(4, –3) బిందువు గుండా పోతూ వాలు m' =–5/2గా గల సరళరేఖా సమీకరణాలు

$y - y_1 = m'(x - x_1)$

$y + 3 = -5/2 (x - 4)$

$2y + 6 = -5x + 20$

$5x + 2y + 6 - 20 = 0$

$5x + 2y - 14 = 0$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం $5x + 2y - 14 = 0$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. (2, 3), (4, -2) బిందువులకు సమాన దూరంలో x - అక్షంపై ఉన్న బిందువుని కనుక్కోండి?

Sol. ఇచ్చిన బిందువులు = A (2, 3), B (4, –2)

X - అక్షంపై ఉన్న బిందువు = P (K, 0) అనుకుంటే..

P బిందువు A, Bలకు సమాన దూరంలో ఉంది. కాబట్టి

$\overline{PA} = \overline{PB}$

$$\sqrt{(k-2)^2+(0-3)^2} = \sqrt{(k-4)^2+(0+2)^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా..

$(k-2)^2 + 3^2 = (k-4)^2 + 2^2$

$k^2 - 4k + 4 + 9 = k^2 - 8k + 16 + 4$

$k^2 - 4k + 13 - k^2 + 8k - 20 = 0$

$4k - 7 = 0$

$4k = 7$

$k = 7/4$

$\therefore$

x - అక్షంపై బిందువు = (7/4, 0)

2. 2x – 4y – 7 = 0 రేఖ నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పడే త్రిభుజవైశాల్యం ఎంత?

Sol. ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం = 2x – 4y – 7 = 0

ax + by + c = 0 సరళరేఖ x అంతరఖండం = – c/a

y అంతరఖండం = – c/b

$\therefore$ 2x – 4y – 7 = 0 రేఖ x అంతరఖండం = 7/2

y అంతరఖండం = - 7/4

నిరూపక అక్షాలు, సరళరేఖ ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

$\therefore$ లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం

= 1/2 |x-అంతర్ ఖండం × y-అంతర ఖండం|

= 1/2 |7/2 × (–7/4)|

= 1/2 |– 49/8|

= 49/16 చ.యూ.

3. (3, 4) గుండా పోతూ 4x + 7y = 8ను సూచించే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి?

Sol. 4x + 7y = 8కు సమాంతరంగా ఉండే రేఖ 4x + 7y = k అవుతుంది.

పై రేఖ (3, 4) గుండా వెళుతుంది. కాబట్టి (3, 4)ను 4x + 7y = kలో ప్రతిక్షేపించగా,

$4(3) + 7(4) = k$

$k = 40$

$4x + 7y = 8$

$\therefore k = 40$

$\therefore$ 4x + 7y = 8కు సమాంతరంగా ఉండే రేఖ 4x + 7y = 40.

4. A (–2, 3), B(6, 7)లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని P (4, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

Sol. A, B బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని m:n నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$$P(x,y) = \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

A (–2, 3), B(6, 7)లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని m:n నిష్పత్తిలో P (4, 6) బిందువు విభజిస్తే..

$$P(4,6) = \left(\frac{m(6)+n(-2)}{m+n}, \frac{m(1)+n(3)}{m+n}\right)$$

$$\therefore 4 = \frac{6m-2n}{m+n}$$

$4m+4n = 6m - 2n$

$4n + 2n = 6m - 4m$

$2m = 6n$

$$\frac{m}{n} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$\therefore$ m: n = 3 : 1

AB రేఖాఖండాన్ని P బిందువు 3:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

5. నిరూపక అక్షాలపై 2x+3y+13=0 సమీకరణం చేసే అంతరఖండాలను కనుక్కోండి?

Sol. అంతరఖండ సమీకరణం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ఇచ్చిన సరళరేఖ 2x+3y+13 = 0

2x+3y = – 13

$$\frac{2x}{-13} + \frac{3y}{-13} = \frac{-13}{-13}$$

x/–13/2 + y/–13/3 = +1

$\therefore$ x - అంతరఖండం a = –13/2

y అంతరఖండం b = – 13/3

6. (t, 2t), (–2, 6), (3, 1)లతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం 5 చదరపు యూనిట్లు అయితే t విలువను కనుక్కోండి?

Sol. A (x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)లతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం = $1/2|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$ చ.యూ.

A (t, 2t), B(–2, 6), C (3, 1) లతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం = 5 చ.యూ.

$1/2|t(6-1) - 2(1-2t) + 3(2t-6)|=5$

$1/2|5t - 2 + 4t + 6t - 18| = 5$

$1/2|15t - 20)|=5$

$15t - 20 = 5$

$15t = 10 + 20$

$t = 30/15$

$t = 2$

7. ఒక వృత్త వ్యాసం ఒక చివరి బిందు నిరూపకాలు (5, 4) వృత్తకేంద్రం (0, 0) అయితే వ్యాసం రెండో చివరి బిందు నిరూపకాలు కనుక్కోండి?

Sol. వృత్త కేంద్రం = (0, 0)

వ్యాసం ఒక చివరి బిందువు = (5, 4)

వ్యాసం రెండో చివరి బిందువు = (x, y) అనుకుంటే..

కేంద్రం = వ్యాసం మధ్యబిందువు

$$(0,0)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{4+y}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{5+x}{2}=0 \quad \text{or} \quad \frac{4+y}{2}=0$$

$5+x = 0$ or $4+y = 0$

$x = -5$ or $y = -4$

$\therefore$ వ్యాసం రెండో చివరి బిందువు = (−5, −4)

8. x- అక్షం ధనదిశలో 150° కోణం చేస్తూ.. y-అంతరఖండం −1గా గల సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి?

Sol. x- అక్షంలో ధనదిశలో చేసే కోణం $\theta = 150°$

వాలు $m = \tan\theta$

$m = \tan 150°$

$= \tan(90+60)$

$= \cot 60°$

$= -1/\sqrt{3}$

y- అంతరఖండం $c = -1$

$m = -1/\sqrt{3}$, $C = -1$ అయినా సరళరేఖా సమీకరణం

$y = mx + C$

$$y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x-1$$

$$y=\frac{-x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}y=-x-\sqrt{3}$$

$$x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. ఒక వ్యాసం చివరి బిందువులు (9, 3), (1, −1) అయితే వృత్త కేంద్రం కనుక్కోండి?

Sol. వ్యాసం చివరి బిందువులు = A (9, 3), B (1, −1)

వ్యాసం మధ్య బిందువు వృత్త కేంద్రం అవుతుంది.

$$\text{వృత్తకేంద్రం} = \left(\frac{9+1}{2},\frac{3-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2}},\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\right)$$

(5, 1)

2. (−4, 4), (−2, 2), (6, 12)లు శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం కనుక్కోండి?

Sol. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

(−4, 4), (−2, 2), (6,12) శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం = $\left(\frac{-4-2+6}{2},\frac{4+2+12}{2}\right)$

$$\left(\frac{0}{2},\frac{18}{2}\right)$$

(0, 9)

3. (3, −5) బిందువు గుండా పోతూ.. వాలు 7/3 కలిగిన సరళరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి?

Sol. వాలు $m = 7/3$

బిందువు = (3, −5)

సరళ రేఖా సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 5 = 7/3\ (x - 3)$

$3y + 15 = 7x - 21$

$7x - 3y - 21 - 15 = 0$

కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం $7x - 3y - 36 = 0$

4. (4, −7), (1, 5) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణం కనుక్కోండి?

Sol. (x_1, y_1), (x_2, y_2) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$

$\therefore$ (4, −7), (1, 5) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణం

$(y + 7)(1 - 4) = (x - 4)(5 + 7)$

$(y + 7)(-3) = (x - 4)\ 12$

$-3y - 21 = 12x - 48$

$12x + 3y - 48 + 21 = 0$

$12x + 3y - 27 = 0$

or

$4x + y - 9 = 0$

5. $2x-3y=12$ సరళరేఖ వాలు, y-అంతరఖండాలను కనుక్కోండి?

Sol. ఇచ్చిన సరళరేఖ $2x - 3y = 12$

$2x - 12 = 3y$

$$y=\frac{2x-12}{3}$$

$$=\frac{2}{3}x-\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{3}}$$

$y = \frac{2}{3}x - 4$

$\therefore$ వాలు $m = 2/3$

y-అంతరఖండం $c = -4$

6. $2x+3y+5=0$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న రేఖవాలును కనుక్కోండి?

Sol. ఇచ్చిన సరళరేఖ $2x+3y+5 = 0$

$3y = -2x - 5$

$y = -2/3x - 5/3$

$\therefore$ వాలు $m = -2/3 = (m)$

దత్తరేఖకు లంబరేఖ వాలు $= -1/m = -1/-2/3 = 3/2$

7. $(-2, 3)$ గుండా పోతూ అక్షాలపై సమాన అంతరఖండాలు చేసే సరళరేఖా సమీకరణం కనుక్కోండి?

Sol. అక్షాలపై సమాన అంతరఖండాలు చేసే సరళరేఖా సమీకరణం

$x + y = a$

ఇది $(-2, 3)$ గుండా పోతుంది.. కాబట్టి

$-2 + 3 = a$

$a = 1$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం $x+y = 1$

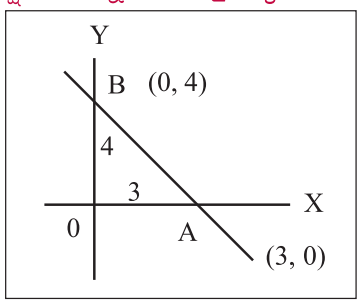
8. $(3, 0), (0, 4), (0, 0)$ శీర్షాలుగా ఉన్న త్రిభుజ వైశాల్యం ఎంత?

Sol. Δ OAB వైశాల్యం=

$1/2 \times OA \times OB$

$= 1/2 \times 3 \times 4$

$= 6$ చ.యూ.



9. A (2, 6), B(5, 1)లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని 2:3 నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించే బిందువును కనుక్కోండి?

Sol. A (x_1, y_1) B (x_2, y_2) లను m:n నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right)$$

A (2, 6) B (5, 1) లను 2:3 నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{2\times5 - 3\times2}{2-3}, \frac{2\times1 - 3\times6}{2-3} \right)$$

$$= \left(\frac{10-6}{-1}, \frac{3-18}{-1} \right)$$

$(-4, 15)$

త్రికోణమితి

ముఖ్యాంశాలు:

త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలకు, వాటి భుజాలకు గల సంబంధాన్ని త్రికోణమితి అంటారు. త్రిభుజ భుజాలకు, వాటి కోణాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని హిప్పార్కస్ 140 B.Cలో ఆవిష్కరించాడు.

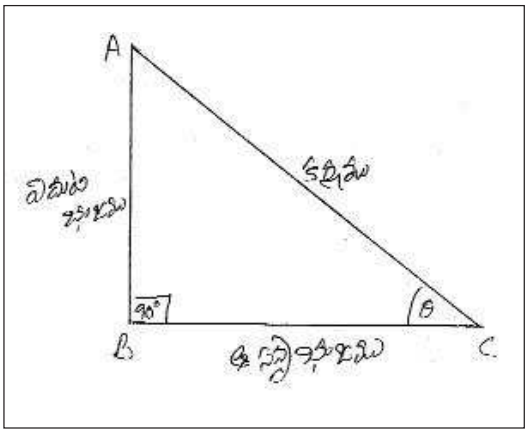
కోణం: రెండు కిరణాల సమ్మేళనాన్ని కోణం అంటారు. కోణాన్ని మూడు పద్ధతుల ద్వారా కొలుస్తారు.

పద్ధతి		ప్రమాణం
1. షష్టాంశమానం(ఆంగ్ల పద్ధతి)	–	డిగ్రీ
2. శతాంశమానం(ఫ్రెంచి పద్ధతి)	–	గ్రేడు
3. వర్తులమానం లేదా రేడియన్ మానం	–	రేడియన్

గమనిక:

1. 90 డిగ్రీలు = 100 గ్రేడ్లు = $\pi/2$ రేడియన్లు
2. 1 రేడియన్ = 57°16'22" (57 డిగ్రీల 16 నిమిషాల 22 సెకన్లు)

త్రికోణమితి నిష్పత్తులు:



1. $\sin\theta$ = ఎదుటి భుజం/కర్ణం = AB/AC
2. $\cos\theta$ = ఆసన్నభుజం/కర్ణం = BC/AC
3. $\tan\theta$ = ఎదుటి భుజం/ఆసన్నభుజం = AB/BC
4. $\csc\theta = \operatorname{cosec}\theta$ = కర్ణం/ఎదుటి భుజం = AC/AB
5. $\sec\theta$ = కర్ణం/ఆసన్నభుజం = AC/BC
6. $\cot\theta$ = ఆసన్నభుజం/ఎదుటి భుజం = BC/AB

సూత్రాలు:

7. $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \Rightarrow \sin\theta \times \csc\theta = 1$
8. $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \Rightarrow \cos\theta \times \sec\theta = 1$
9. $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta \times \cot\theta = 1$
10. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
11. $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
12. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
13. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
14. $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
15. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
16. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
17. $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

త్రికోణమితి నిష్పత్తి విలువలు:

1. $\sin 0° = \cos 90° = 0$
2. $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$
3. $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\sin 60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$
5. $\sin 90° = \cos 0° = 1$

గమనిక:

1. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
2. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
3. $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ లను ఉపయోగించి 'θ' విలువలను కనుక్కోవచ్చు.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ అని చూపించండి?

Sol:

We know that

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$$\text{L.H.S} = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$= \tan\theta + \sec\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \left(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ and } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \right)$$

$$= \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$$

= R.H.S

∴ L.H.S = R.H.S

2. $\text{cosec}\theta + \cot\theta = P$ అయితే $(P^2+1)\cos\theta = (P^2-1)$ అని చూపించండి?

Sol:

We know that

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$(\text{cosec}\theta + \cot\theta)(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

given that $\text{cosec}\theta + \cot\theta = p$ ____ (1)

∴ $p(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$\text{cosec}\theta - \cot\theta = 1/p$ ____ (2)

(1), (2)లను సాధిస్తే..

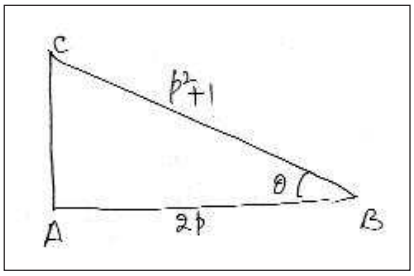
$$\text{cosec}\theta + \cancel{\cot\theta} = p$$

$$\text{cosec}\theta - \cancel{\cot\theta} = \frac{1}{p}$$

$$2\,\text{cosec}\theta = p + \frac{1}{p}$$

$$2\,\text{cosec}\theta = \frac{p^2+1}{p}$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{p^2+1}{2p}$$



$\text{cosec}\theta$ = కర్ణం/ఆసన్నభుజం = $\frac{BC}{AB} = \frac{p^2+1}{2p}$

ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$AC^2 = BC^2 - AB^2$

$= (p^2+1)^2 - (2p)^2$

$= p^2 + 1 + 2p^2 - 4p^2$

$= p^2 + 1 - 2p^2$

$AC^2 = (p^2-1)^2$

∴ $AC = p^2 - 1$

పటం నుంచి $\cos\theta$ = ఆసన్నభుజం/కర్ణం = $\frac{p^2-1}{p^2+1}$

$$\cos\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1} \Rightarrow (p^2+1)\cos\theta = p^2 - 1$$

3. $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$ అని చూపించండి?

Sol:

(1) $3(\sin x - \cos x)^4 = 3\left[(\sin x - \cos x)^2\right]^2$

$$= 3\left[\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x\right]^2$$

$$= 3\left[1 - 2\sin x \cos x\right]^2$$

$$= 3\left[1 + 4\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin x \cos x\right]$$

$= 3 + 12\sin^2 x \cos^2 x - 12 \sin x \cos x$

(2) $6(\sin x + \cos x)^2 = 6(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x)$

$= 6(1 + 2\sin x \cos x)$

$= 6 + 12 \sin x \cos x$

(3) $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\left[(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3\right]$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)}$$

$$= 4\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)\right]$$

$$= 4\left[1 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right]$$

$= 4 - 12 \sin^2 x \cos^2 x$

(1) + (2) + (3) చేయగా

L.H.S =

$3(\sin x - \cos x) + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x)$

$= 3 + \cancel{12\sin^2 x \cos^2 x} - \cancel{12\sin x \cos x} + 6 + \cancel{12\sin x \cos x} + 4 - \cancel{12\sin^2 x \cos^2 x}$

$= 3 + 6 + 4$

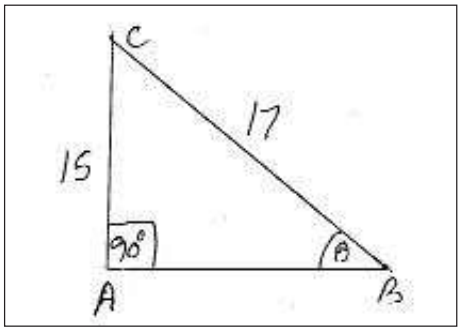
$= 13$ = R.H.S

∴ L.H.S = R.H.S

4. $\sin\theta = \frac{15}{17}$ అయితే $\frac{15\cot\theta + 17\sin\theta}{8\tan\theta + 16\sec\theta}$ విలువ కనుక్కోండి?

Sol:

దత్తాంశం $\sin\theta = 15/17$



ABC లంబకోణ త్రిభుజం ప్రకారం..

$$\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$AB^2 = BC^2 - AC^2$

$= 17^2 - 15^2$

$= 289 - 225$

$AB^2 = 64$

$AB = \sqrt{64} = 8$

ΔABC నుంచి

$$\sin\theta = \frac{15}{17}$$

$$\sec\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{17}{8}$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8}$$

$$\cot\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{15\cot\theta + 17\sin\theta}{8\tan\theta + 16\sec\theta} = \frac{\cancel{15}\times\frac{8}{\cancel{15}} + \cancel{17}\times\frac{15}{\cancel{17}}}{\cancel{8}\times\frac{15}{\cancel{8}} + \overset{2}{\cancel{16}}\times\frac{17}{\cancel{8}}}$$

$$= \frac{8+15}{15+34}$$

$$= \frac{23}{49}$$

5. a = xcosθ + ysinθ, b = xsinθ – ycosθల నుంచి 'θ'ను తొలగించండి?

Sol:

$a = x\cos\theta + y\sin\theta$

ఇరువైపుల వర్గం చేస్తే..

$a^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2$

$= x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta$ _____ (1)

ఇదే విధంగా..

$b = x\sin\theta - y\cos\theta$

ఇరువైపుల వర్గం చేస్తే...

$b^2 = (x\sin\theta + y\cos\theta)^2$

$= x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta$ _____ (2)

(1) + (2) చేస్తే..

$a^2 + b^2 =$

$x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + \cancel{2xy\sin\theta\cos\theta} + x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - \cancel{2xy\sin\theta\cos\theta}$

$= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= x^2 + y^2 \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$\therefore a^2 + b^2 = x^2 + y^2$

6. $\tan^2\alpha - \tan^2\beta = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \times \cos^2\beta}$ అని చూపించండి?

Sol:

L.H.S = $\tan^2\alpha - \tan^2\beta$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} \quad \left(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\beta\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$= \frac{\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} \quad (\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta)$$

$$= \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$= \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

= R. H. S

$\therefore$ L. H. S = R.H.S

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \text{cosec}\theta - \cot\theta$ అని చూపించండి?

Sol:

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{(1-\cos\theta)}{1-\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \quad (\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

= cosecθ – cotθ

= R.H.S

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

2. $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ అయితే B పరిమాణాన్ని వర్తులమానంలో కనుక్కోండి?

Sol:

దత్తాంశం $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\tan(A-B) = \tan 30^\circ \quad \left(\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$A - B = 30^\circ$ _____ (1)

ఇదేవిధంగా..

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin A = \sin 45^\circ \left(\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$A = 45^\circ$ ____ (2)

(2)ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$45^\circ - B = 30^\circ$

$45^\circ - 30^\circ = B$

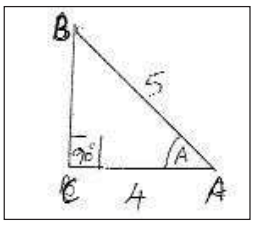
$\therefore B = 15^\circ$

B విలువ వర్తులమానంలో $B = 15^\circ \times \frac{\pi^c}{180} = \pi^c/12$

3. cosA = 4/5, 0° < A < 90° అయితే secA – tanA విలువ కనుక్కోండి?

Sol:

దత్తాంశం $\cos A = 4/5$



ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$$

లంబకోణ త్రిభుజంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

$= 5^2 - 4^2$

$BC = \sqrt{9} = 3$

$$\therefore \sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = 3/4$$

$$\sec A - \tan A = 5/4 - \frac{3}{4} = 2/4 = 1/2$$

4. $32\cot^2 \pi/4 - 8\sec^2 \pi/3 + 8\cot^3 \pi/6$ విలువెంత?

Sol:

$$\cot^2 \pi/4 = \cot^2 \frac{180}{4} = \cot^2 45 = 1^2 = 1$$

$$\sec^2 \pi/3 = \sec^2 \frac{180}{3} = \sec^2 60 = (2)^2 = 4$$

$$\cot^3 \pi/6 = \cot^3 \frac{180}{6} = \cot^3 30 = \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore 32\cot^2 \pi/4 - 8\sec^2 \pi/3 + 8\cot^3 \pi/6 = 32(1) - 8 \times 4 + 8 \times 3\sqrt{3}$$

$= 32 - 32 + 24\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3}$

5. x = asecθ, y = btanθ సమీకరణాల్లో 'θ' ను తొలగించండి?

Sol:

$x = a\sec\theta$; $y = b\tan\theta$

$x/a = \sec\theta$; $y/b = \tan\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ కాబట్టి

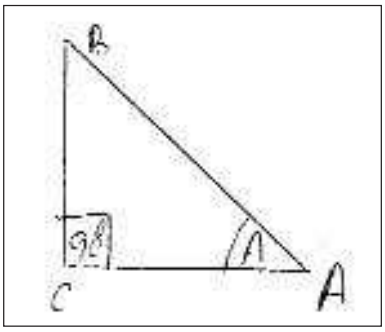
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2b^2} =$$

$\therefore b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ అని చూపించండి?



పటం నుంచి..

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$= \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

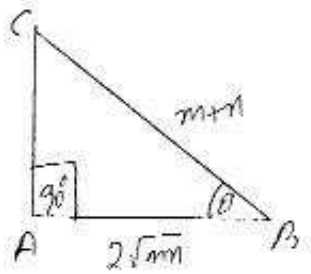
$BC^2 + AC^2 = AB^2$ కాబట్టి

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{\cancel{AB^2}}{\cancel{AB^2}} = 1$$

7. $\sec\theta = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$ అయితే sinθను కనుక్కోండి?

Sol:

$$\sec\theta = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$$



ABC లంబకోణ త్రిభుజం నుంచి..

$$\sec\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం..

$AC^2 = BC^2 - AB^2$

$= (m+n)^2 - (2\sqrt{mn})^2$

$= m^2 + n^2 + 2mn - 4mn$

$= m^2 + n^2 - 2mn$

$= (m-n)^2$

$AC = m - n$

∴ పటం నుంచి

$$\sin\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$= \frac{m-n}{m+n}$$

8. $\sec\theta(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = 1$ అని చూపించండి?

Sol:

L.H.S = $\sec\theta(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta)$

$= (\sec\theta - \sec\theta.\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta)$

$$= \left(\sec\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(\sec\theta+\tan\theta)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)$$

$= \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$= 1 = R.H.S$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $5\pi^c/2$ విలువను శతాంశమానంలో (గ్రేడుల్లో) తెల్పండి?

Sol:

$$\pi^c/2 = 100^g$$

$$\frac{5}{2}\pi^c = 100^g \times 5$$

$= 500^g$

2. $\tan\theta$ విలువను $\cos\theta$లో తెల్పండి?

Sol:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}}$$

3. $\sin 420°$ విలువను కనుక్కోండి?

Sol:

$\sin 420° = \sin(360° + 60°)$

$= \sin 60°$

$$= \sqrt{3}/2$$

4. $\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$ విలువెంత?

Sol:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 30° = \sqrt{3}/2 \qquad \sin 30° = 1/2$$

∴ $\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

5. 270°లను వర్తులమానం (రేడియన్స్)లోకి మార్చండి?

Sol:

$$90° = \pi^c/2$$

$$1° = \pi^c/180$$

$$270° = \overset{3}{\cancel{270}} \times \pi^c/\underset{2}{\cancel{180}}$$

$$= \frac{3\pi^c}{2}$$

6. $\sin\theta = \frac{5}{13}$ అయితే $\cos\theta$ విలువ కనుక్కోండి?

Sol:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ అని తెలుసు కాబట్టి

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{25}{169}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{169-25}{169}}$$

$= \sqrt{\frac{144}{169}}$

$= \frac{12}{13}$

7. $x = \sec\theta + \tan\theta$, $y = \sec\theta - \tan\theta$లలో '$\theta$'ను లోపింప చేయండి?

Sol:

$x = \sec\theta + \tan\theta$

$y = \sec\theta - \tan\theta$

$xy = (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

$= \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$xy = 1$

8. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$ అని చూపించండి?

Sol:

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= 1 + \sin 2\theta \quad (\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta)$

9. $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta.\text{cosec}^2\theta$ అని చూపించండి?

Sol:

$$\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$= \text{cosec}^2\theta.\sec^2\theta$

5 మార్కుల ప్రశ్నలు

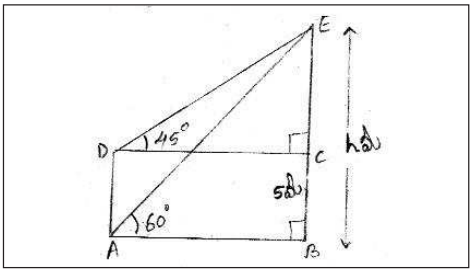
1. ఒక భవనం నేల మట్టం నుంచి, మొదటి అంతస్తు నుంచి ఒక చర్చి గోపురంపై భాగాన్ని విడివిడిగా చూసినపుడు 60°, 45°ల ఊర్ధ్వ కోణాలుగా గమనించారు. భవనం మొదటి అంతస్తు 5 మీటర్ల ఎత్తులో ఉన్నట్లయితే, చర్చి గోపురం ఎత్తును కనుక్కోండి.

Sol:

చర్చి గోపురం ఎత్తు BE = hమీ. అనుకొంటే..

భవనం ఎత్తు AD = BC = 5మీ.

దత్తాంశం ప్రకారం..



$\angle CDE = 45°$

$\angle BAE = 60°$

BC + CE = BE కాబట్టి

5 + CE = h

CE = h–5

ABE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 60° = \frac{BE}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{AB}$$

$$AB = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \text{——— (1)}$$

CDE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 45° = \frac{CE}{CD}$$

$$1 = \frac{h-5}{CD}$$

CD = h–5 ——— (2)

AB = CD కాబట్టి (1), (2)ల నుంచి

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = h - 5$$

$$h = \sqrt{3}h - 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}h - h = 5\sqrt{3}$$

$$h(\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3}$$

$$h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \text{ మీ.}$$

$\therefore$ చర్చిగోపురం ఎత్తు $h = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ మీ.

2. సమానమైన ఎత్తు కలిగిన రెండు స్తంభాలు ఒకదానికొకటి 100 మీటర్ల దూరంలో నిలబెట్టి ఉన్నాయి. ఈ రెండు స్తంభాలకు మధ్య ఒక బిందువు నుంచి ఈ స్తంభాల కొనలు వరుసగా 30°, 60°ల ఊర్ధ్వ కోణాలు చేస్తునట్లయితే.. స్తంభాల ఎత్తును, స్తంభాల మధ్య పరిశీలన చేసే బిందువు స్థానాలను కనుక్కోండి?

Sol:

రెండు స్తంభాల ఎత్తులు AB = CD = hమీ. అనుకొంటే..

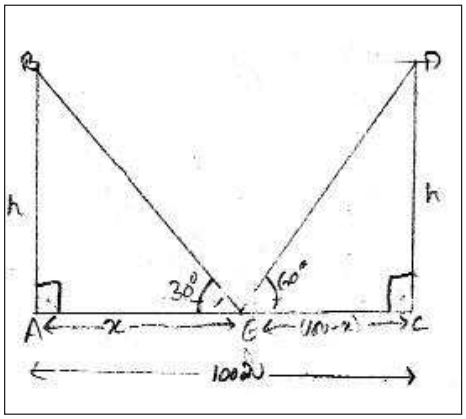
రెండు స్తంభాల మధ్య దూరం AC = 100మీ.

E నుంచి Aకు గల దూరం AE = xమీ. అనుకొంటే..

CE = AC – AE

= 100 – x

దత్తాంశం ప్రకారం..



$\angle AEB = 30°, \angle CED = 60°$

ABE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 30° = \frac{AB}{AE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$$

$$x = h\sqrt{3}$$

$$h = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{_____ (1)}$$

CDE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 60° = \frac{CD}{EC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{100 - x}$$

$h = \sqrt{3}\ (100 - x)$ _____ (2)

(1), (2)ల నుంచి

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(100 - x)$$

$x = 3(100 - x)$
$x = 300 - 3x$
$x + 3x = 300$
$4x = 300$

$$x = \frac{300}{4}$$

$x = 75$

∴ E బిందువు AB స్తంభంకు 75మీ. దూరంలో ఉంది.

$x = 75$ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$$h = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{75}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{75}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{75\sqrt{3}}{3}$$

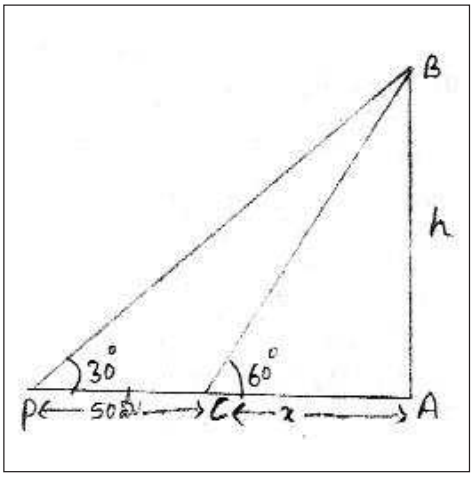
$h = 25\sqrt{3}$

సమాన పొడవు కలిగిన స్తంభాల ఎత్తులు AB=CD = $25\sqrt{3}$మీ.

3. ఒక పొగ గొట్టం పాదం గుండా పోయే క్షితిజ రేఖపై ఒక బిందువు నుంచి పాదం వైపు 50మీ. దూరం నడిచి వెళ్లినపుడు గొట్టం పై భాగం చేసే ఊర్ధ్వకోణం 30°ల నుంచి 60°లకు మారుతున్నట్లయితే పొగ గొట్టం ఎత్తును కనుక్కోండి?

Sol:

పొగ గొట్టం ఎత్తు AB = hమీ. అనుకొంటే.. పరిశీలకుడు క్షితిజ రేఖపై P నుంచి పొగ గొట్టంపై భాగాన్ని 30°ల ఊర్ధ్వకోణంలో చూసి, పాదం వైపు 50 మీటర్లు నడిచి C వద్ద నుంచి 60°ల కోణంలో పొగ గొట్టం పై భాగాలను చూశాడు.



∴ $\angle BPA = 30°$ $\angle BCA = 60°$

$PC = 50$మీ. $AC = x$ అనుకొంటే..

$PA = PC + CA = 50 + x$

ΔAPB లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 30° = \frac{AB}{PA} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 50}$$

$$h\sqrt{3} = x + 50 \Rightarrow h = \frac{x + 50}{\sqrt{3}} \quad \text{_____(1)}$$

ΔABCలో $\tan 60° = \frac{AB}{AC}$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$h = x\sqrt{3}$ _____ (2)

(1), (2)ల నుంచి $\frac{x + 50}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$

$x + 50 = 3x$
$3x - x = 50$
$2x = 50$
$x = 50/2$
$x = 25$మీ.

∴ $x = 25$మీ.లను (2)లో ప్రతిక్షేపిస్తే..

$h = x\sqrt{3}$
$h = 25\sqrt{3}$మీ.

∴ పొగ గొట్టం ఎత్తు $h = 25\sqrt{3}$మీ.

4. A, B అనే రెండు దేవాలయాలు నదికి ఇరువైపుల గల గట్లపై ఒకదానికొకటి ఎదురుగా ఉన్నాయి. 40 మీటర్ల ఎత్తు గల దేవాలయం A పై భాగం నుంచి, దేవాలయం B పై భాగం, పాదం (అడుగు భాగం) వరుసగా 12°30', 21°48'ల నిమ్నకోణాలు చేస్తున్నట్లయితే నది వెడల్పును, దేవాలయం B ఎత్తును సుమారుగా కనుక్కోండి?

నిమిషాలు/డిగ్రీలు	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	మధ్యమ భేదాలు				
										3	6	9	12	15
12°	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272					
21°	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3395	0.3979	0.4000	3	7	10	13	17

Sol:

A దేవాలయం ఎత్తు AC = 40మీ.

B దేవాలయం ఎత్తు BD = hమీ. అనుకొంటే..

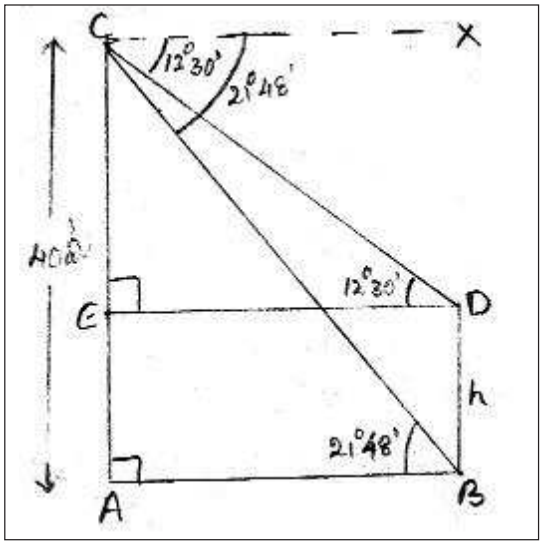
నది వెడల్పు = AB = DE

CE = AC – BD

= 40 – h

DE // CX

లెక్క ప్రకారం..



∠XCD = 12°30'

∠XCB = 21°48'

∴ ∠CDE = ∠XCD = 12°30' (ఏకాంతర కోణాలు)

∠ABC = ∠XCB = 21°48'

ΔABC లంబకోణ త్రిభుజంలో

$$\tan 21°48' = \frac{AC}{AB}$$

పట్టిక ద్వారా tan 21°48' = 0.4000

$$\therefore 0.4000 = \frac{40}{AB}$$

$$\therefore AB = \frac{40}{0.4}$$

$$AB = \frac{400}{4} = 100 \text{ మీ.}$$

∴ నది వెడల్పు = 100మీ.

ΔCDE లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 12°30' = \frac{CE}{DE}$$

పట్టిక ద్వారా tan 12°30' = 0.2217

$$0.2217 = \frac{40 - h}{DE}$$

$$0.2217 = \frac{40 - h}{100}$$

(∵ DE = AB = నది వెడల్పు = 100మీ.)

100 × 0.2217 = 40 – h

22.17 = 40 – h

h = 40 – 22.17

= 17.83

∴ దేవాలయం ఎత్తు = 17.83మీ.

5. 2500 మీటర్ల ఎత్తులో ఎగురుతున్న ఒక విమానం నుంచి ఒక నది ఇరువైపుల ఎదురెదురుగా ఉన్న రెండు స్థానాలను చూసినప్పుడు 41°20', 52°10' నిమ్నకోణాలను చేసినట్లయితే, నది వెడల్పును మీటర్లలో కనుక్కోండి?

నిమిషాలు/డిగ్రీలు	0'	6'	12'	18'	24'	మధ్యమ భేదాలు				
						1	2	3	4	5
41°	0.8693	0.8724	0.8754	0.8784	0.8816	5	10	16	21	26
52°	1.2799	2846	2892	2938	2985	8	16	24	31	39

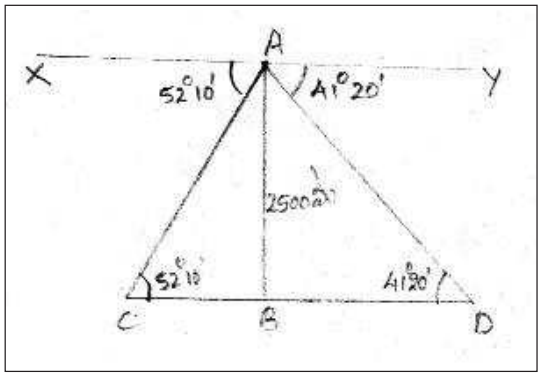
Sol:

విమానం 2500మీ. ఎత్తులో ఎగురుతుంది.

AB = 2500మీ.

నది వెడల్పు = CD

దత్తాంశం ప్రకారం..



$\angle XAC = 52°10°$

$\angle YAD = 41°20'$

CD // XY, AC, ADలు తిర్యక్ రేఖలు కాబట్టి

$\angle ACB = \angle XAC = 52°10'$

$\angle ADB = \angle YAD = 41°20'$

లంబకోణ త్రిభుజం ACBలో

$$\tan 52°10' = \frac{AB}{BC}$$

పట్టిక నుంచి $\tan 52°10' = \tan(52°6' + 4')$

$= 1.2846 + 0.0031$

$= 1.2877$

$$1.2877 = \frac{2500}{BC}$$

$$BC = \frac{2500}{1.2877}$$

= 1941.4మీ. _____ (1)

ΔABD లంబకోణ త్రిభుజంలో..

$$\tan 41°20' = \frac{AB}{BD}$$

పట్టిక ద్వారా $\tan 41°20' = \tan(41°18' + 2')$

$= 0.8785 + 0.0010 = 0.8795$

$$0.8795 = \frac{2500}{BD}$$

$$BD = \frac{2500}{0.8795}$$

= 2842.5మీ. _____ (2)

నది వెడల్పు CD = CB + BD

$= 1941.4 + 2842.5$

= 4783.9మీ.

సాంఖ్యకశాస్త్రం

సూత్రాలు

1. అవర్గీకృత దత్తాంశ సగటు = $\frac{\Sigma x}{n}$

ఇక్కడ x = పరిశీలనాంశాలు

n = అంశాల సంఖ్య

2. వర్గీకృత దత్తాంశానికి దీర్ఘ పద్ధతిలో సగటు = $\frac{\Sigma fx}{N}$

x = తరగతి మధ్య విలువలు

f = పౌనఃపున్యాలు

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

3. విచలన పద్ధతి (సంక్షిప్త పద్ధతి)లో సగటు = $A+\frac{1}{N}(\Sigma f_iU_i)\times C$

ఇక్కడ A = కల్పిత సగటు

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

$U_i = \frac{x_i - A}{C}$ = విచలనాలు

f_i = పౌనఃపున్యాలు

C = తరగతి అంతరం

4. వర్గీకృత దత్తాంశ మధ్యగతం = $L+\frac{N/2 - F}{f}\times C$

L = N/2 తరగతి దిగువ హద్దు

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

F = N/2 తరగతి ముందు తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం

f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యం

C = తరగతి అంతరం

5. వర్గీకృత దత్తాంశ బాహుళకం = $L+\frac{f - f_1}{2f-(f_1+f_2)}\times C$

(లేదా)

$=L+\frac{\Delta_1 C}{\Delta_1+\Delta_2}$

ఇక్కడ $\Delta_1 = f - f_1$

$\Delta_2 = f - f_2$

f = గరిష్ట పౌనఃపున్యం

f_1 = గరిష్ట పౌనఃపున్యం పైన ఉన్న పౌనఃపున్యం

f_2 = గరిష్ట పౌనఃపున్యం కింద ఉన్న పౌనఃపున్యం

L = గరిష్ట పౌనఃపున్య తరగతి దిగువ హద్దు

C = తరగతి అంతరం

6. బాహుళకం = 3 మధ్యగతం —— 2 సగటు

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. కింద ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనానికి సంక్షిప్త పద్ధతి ద్వారా సగటు కనుక్కోండి?

తరగతులు	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
పౌనఃపున్యం	8	15	20	45	12

Sol:

తరగతులు	పౌనఃపున్యాలు f_i	మధ్య విలువలు x_i	విచలనాలు $U_i = x_i - A/C$	$f_i U_i$
0-9	8	4.5	–2	–16
10-19	15	14.5	–1	–15
20-29	20	(24.5) A	0	0
30-39	45	34.5	1	45
40-49	12	44.5	2	24
	N = 100			Σf_iU_i = –31 + 69 = 38

A = 24.5 C = 10

N = 100 Σf_iU_i = 38

సగటు = $A+\frac{1}{N}(\Sigma f_iU_i)C$

$=24.5+\frac{38}{10\cancel{0}}\times 1\cancel{0}$

= 24.5 + 3.8 = 28.3

2. కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతం కనుక్కోండి?

తరగతి అంతరం	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
పౌనఃపున్యం	15	16	38	15	9	7

Sol:

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం	
20-29	15	15	
30-39	16	31 F	
40-49	38 f	69	N/2 తరగతి
50-59	15	84	
60-69	9	93	
70-79	7	100	
	N = 100		

$N = 100$

$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$F = 31$

$f = 38$

$L = \frac{39+40}{2} = 39.5$

$C = 10$

మధ్యగతం $= L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times C$

$= 39.5 + \frac{50-31}{38} \times 10$

$= 39.5 + \frac{\cancel{19}}{\cancel{38}_{\cancel{19}}} \times \cancel{10}^{5}$

$= 39.5 + 5$

$= 44.5$

3. 100 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు పట్టికలో ఇచ్చారు. బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి?

మార్కులు	15-24	25-34	35-44	45-54	54-64	65-74
విద్యార్థుల సంఖ్య	8	20	28	30	10	4

Sol:

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	
15-24	8	
25-34	20	
35-44	$28\ f_1$	
45-54	$30\ f$	బాహుళక తరగతి
54-64	$10\ f_2$	
65-74	4	

$f = 30$

$f_1 = 28$

$f_2 = 10$

$L = \frac{44+45}{2} = 44.5$

$C = 10$

బాహుళకం $= L + \frac{f - f_1}{2f - (f_1 + f_2)} \times C$

$= 44.5 + \frac{30-28}{2\times 30 - (28+10)} \times 10$

$= 44.5 + \frac{2\times 10}{60-38}$

$= 44.5 + \frac{20}{22}$

$= 44.5 + 0.91 = 45.41$ (సుమారుగా)

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. 20 పరిశీలనాంశాల సగటు 12.5. పొరపాటున ఒక అంశం 15కి బదులు –15 అని నమోదు చేసినట్లయితే సరైన సగటు ఎంత?

Sol:

20 పరిశీలనాంశాల సగటు = 12.5

20 పరిశీలనాంశాల మొత్తం = $12.5 \times 20 = 250$

సరైన అంశం విలువ	తప్పుగా రాసిన అంశం విలువ	ఫలితం
15	–15	మొత్తంలో 15– (–15) = 15 + 5 = 30 పెరగాలి.

$\therefore$ 20 అంశాల మొత్తం = 250 + 30 = 280

సరైన సగటు $= \frac{28\cancel{0}}{2\cancel{0}} = 14$

2. అంకగణిత సగటు విశిష్టతను రాయండి?

Sol:

1. ఒకే విలువను కలిగి ఉంటుంది.
2. అన్ని దత్తాంశ విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.
3. సులభంగా బోధపడుతుంది.
4. సులభంగా లెక్కించవచ్చు.

3. ఒక పరిశీలనలో $x_1, x_2, 2x_1$లు అంశాలు. $x_1 < x_2 < 2x_1$ వాటి A.M, మధ్యగతాలు 6కి సమానం. ఆ పరిశీలనాంశాలను కనుక్కోండి?

Sol:

పరిశీలనాంశాలు = $x_1, x_2, 2x_1$

A.M. = 6

$\frac{x_1 + x_2 + 2x_1}{3} = 6$

$3x_1 + x_2 = 18$ ____ (1)

మధ్యగతం = 6

$x_1, x_2, 2x_1$ల మధ్యగతం = x_2

$\therefore x_2 = 6$

(1) నుంచి $3x_1 + x_2 = 18$

$3x_1 + 6 = 18$

$3x_1 = 18 - 6$

$x_1 = \frac{12}{3} = 4$

$\therefore$ పరిశీలనాంశాలు = 4, 6, 8

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. ఏక బాహుళక దత్తాంశం A.M., మధ్యగతాలు వరుసగా 28.2, 30.5 అయితే బాహుళకం ఎంత?

Sol:

సగటు A.M. = 28.5

మధ్యగతం = 30.5

బాహుళకం = 3 మధ్యగతం —— 2 సగటు

= 3 × 30.5 —— 2 ×28.5

= 91.5 —— 57.0

= 34.5

2. $\frac{x}{5}, x, \frac{x}{4}, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}$ **ల మధ్యగతం 8 అయితే x విలువ ఎంత? (x>0)**

Sol:

ఇచ్చిన విలువలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయగా..

$\frac{x}{5}, \frac{x}{4}, \frac{x}{3}, \frac{x}{2}, x$

మధ్యగతం = $\frac{x}{3}$

లెక్క ప్రకారం మధ్యగతం = 8

$\therefore \frac{x}{3} = 8$

x = 24

3. 9, 11, 13, p, 18, 19ల అంకగణిత సగటు p అయితే p విలువను కనుక్కోండి?

Sol:

దత్తాంశం = 9, 11, 13, p, 18, 19

సగటు = p

$\frac{9+11+13+p+18+19}{6} = p$

$\frac{70+p}{6} = p$

70 + p = 6p

70 = 6p–p

5p = 70

$p = \frac{70}{5}$

p = 14

4. బాహుళకం ధర్మాలను రెండింటిని తెల్పండి?

Sol:

1. దత్తాంశానికి బాహుళకం ఉండవచ్చు లేదా లేకపోవచ్చు.
2. బాహుళకం ఉన్నట్లయితే అది ఒకే ఒక అంశమే కానవసరం లేదు.
3. ఒక్కొక్కప్పుడు బాహుళకం లేకపోవచ్చు.

5. 30, 5, 21, 42, 13, 10, 27, 33, 17, 8 దత్తాంశ మధ్యగతం ఎంత?

Sol:

ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో రాస్తే...

5, 8, 10, 13, 17, 21, 27, 30, 33, 42

దత్తాంశంలోని అంశాల సంఖ్య = 10 కాబట్టి $\frac{10}{2}, \frac{10}{2}+1$

అంటే 5, 6 అంశాల సగటు మధ్యగతం అవుతుంది.

$\therefore$ మధ్యగతం = $\frac{17+21}{2} = 19$

మాత్రికలు

మాత్రిక:

అంకెలను లేదా సంఖ్యలను అడ్డు వరుసలలోను, నిలువు వరుస లలోను అమర్చితే ఏర్పడే అమరికను మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

ఒక మాత్రికలో అడ్డు వరుసల సంఖ్య m, నిలువు వరుసల సంఖ్య n, ఉంటే m×nను ఆ మాత్రిక పరిమాణం అంటారు.

చతురస్ర మాత్రిక:

అడ్డు వరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానంగా ఉంటే..ఆ మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక:

మాత్రికలో అడ్డువరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్యకు సమానంగా లేనట్లయితే అది దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక అవుతుంది.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times4}$

పంక్తి మాత్రిక:

ఒకే అడ్డు వరుస గల మాత్రికను పంక్తి మాత్రిక లేదా అడ్డు వరుస మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times3}$

దొంతి మాత్రిక:

ఒకే ఒక నిలువు వరుస గల మాత్రికను నిలువు వరుస మాత్రిక ,లేదా దొంతి మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1}$

శూన్య మాత్రిక:

మాత్రికలో ప్రతి మూలకం సున్నా అయితే అది శూన్య మాత్రిక.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$

వ్యత్యయ మాత్రిక:

ఒక మాత్రికలోని అడ్డు వరుసలను నిలువు వరుసలు గాను, నిలు వు వరుసలను అడ్డు వరుసలు గాను అమర్చితే అది దత్త మాత్రిక వ్యత్యయ మాత్రిక అవుతుంది. A ఒక మాత్రిక అయితే దాని వ్యత్యయ మాత్రిక A^T.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{2\times2}$

సంఖ్యా మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణముల్లోని మూలకాలు సమానంగా ఉండి, మిగిలిన మూలకాలు సున్నా అయితే ఆ మాత్రికను సంఖ్యా మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

తత్సమ మాత్రిక:

చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణంలోని ప్రతి మూలకం 1గా ఉండి.. మిగిలిన మూలకాలన్నీ 0 అయితే అది యూనిట్ మాత్రిక లేదా తత్సమ మాత్రిక.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

సౌష్టవ మాత్రిక:

ఒక మాత్రిక దాని వ్యత్యయ మాత్రికకు సమానమైతే $(A = A^T)$ అది సౌష్టవ మాత్రిక అవుతుంది.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{2\times2}$

అసౌష్టవ మాత్రిక:

ఒక మాత్రిక వ్యత్యయ మాత్రిక దాని సంకలన విలోమానికి సమా నమైతే $(A^T = -A)$ అది అసౌష్టవ మాత్రిక.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{2\times2}$

$$A^T = -A, = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}_{2\times2}$$

విలక్షణ మాత్రిక:

నిర్ధారకం సున్నాగా గల చతురస్ర మాత్రికను విలక్షణ మాత్రిక అంటారు.

అవిలక్షణ మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకం శూన్యేతరమైతే ఆ మాత్రికను అవిలక్షణ మాత్రిక అంటారు.

విలోమ మాత్రిక:

A ఒక అవిలక్షణ మాత్రిక అయితే Aతో సమానమైన పరిమాణంతో AB = BA = Iను తృప్తిపరిచే చతురస్రమాత్రిక Bను, A గుణన విలోమం అంటారు. దీన్ని $B = A^{-1}$తో సూచిస్తారు.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ అయితే

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ అవుతుంది.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **అయితే** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **అని చూపండి?**

Sol:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 4-1 & 6-2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ అయితే $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ —— (1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-1+2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2+6 & 2-3 \\ 1-4 & -1+2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ —— (2)

(1), (2)ల నుంచి $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. $4x - y = 16, \frac{3x-7}{2} = y$ **సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి?**

Sol:

$4x - y = 16$ —— (1)

$\frac{3x-7}{2} = y$

$3x - 7 = 2y$

$3x - 2y = 7$ —— (2)

(1), (2) సమీకరణాలను మాత్రిక రూపం (AX = B)లో రాస్తే...

$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$

$|A| = 4(-2) - 3(-1)$

$= -8 + 3$

$= -5$

A మాత్రికలోని మొదటి నిలువు వరుసకు బదులు B రాస్తే B_1, A లోని రెండో నిలువు వరుసకు బదులుగా B రాస్తే B_2 అవుతుంది.

$B_1 = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

$|B_1| = 16(-2) - 7(-1)$

$= -32 + 7$

$= -25$

$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$|B_2| = 4\times7 - 16\times3$

$= 28 - 48$

$= -20$

$\therefore x = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{-25}{-5} = 5$

$y = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{-20}{-5} = 4$

$\therefore x = 5, y = 4$

3. $2x + 5y = 11, 4x - 3y = 9$ సమీకరణాలను మాత్రిక విలోమ పద్ధతిన సాధించండి?

Sol:

$2x + 5y = 11$

$4x - 3y = 9$

మాత్రిక రూపంలో రాస్తే...

$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ 9\end{pmatrix}$ అనుకుంటే...

$A \quad X = B$

ఇక్కడ $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11\\ 9\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ అయితే $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{-6-20}\begin{pmatrix}-3 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{-26}\begin{pmatrix}-3 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

$AX = B$ అయితే $X = A^{-1}B$ అవుతుంది.

$X=\frac{1}{-26}\begin{pmatrix}-3 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 9\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{-26}\begin{pmatrix}-33-45\\ -44+18\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{-26}\begin{pmatrix}-78\\ -26\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-78/-26\\ -26/-26\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

$x = 3, y = 1$

4. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ అయితే

$A^2-(a+d)A = (bc-ad)I$ అని చూపించండి?

Sol:

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}$

$(a+d)A=(a+d)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}(a+d)a & (a+d)b\\ (a+d)c & (a+d)d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+ad & ab+db\\ ac+dc & ad+d^2\end{pmatrix}$

$A^2-(a+d)A=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+ad & ab+db\\ ac+dc & ad+d^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\cancel{a^2}+bc-\cancel{a^2}-ad & \cancel{ab}+\cancel{bd}-\cancel{ab}-\cancel{db}\\ \cancel{ac}+\cancel{dc}-\cancel{ac}-\cancel{dc} & bc+\cancel{d^2}-ad-\cancel{d^2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}bc-ad & 0\\ 0 & bc-ad\end{pmatrix}$

$=(bc-ad)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$= (bc - ad)I$

$\therefore A^2-(a+d)A = (bc-ad)I$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & m\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$; $AB = BA$

అయినప్పుడు mను కనుక్కోండి?

Sol:

$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}2 & m\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & m\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+0 & m-2\\ 0+0 & 0+1/2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & m-2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & m\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+0 & 8-m\\ 0+0 & 0+1/2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 8-m \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

AB = BA (దత్తాంశం)

$\begin{pmatrix} 2 & m-2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8-m \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

సదృశ్య మూలకాలను పోల్చితే...

$m - 2 = 8 - m$

$m + m = 8 + 2$

$m = 10/2 = 5$

$\therefore m = 5$

2. $MX\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$ **అయితే M పరిమాణం కనుక్కొని, M మాత్రిక నిర్ధారించండి?**

Sol:

$MX\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$

M మాత్రిక అడ్డు వరుసల సంఖ్య, లబ్ధ మాత్రిక అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానం. నిలువు వరుసల సంఖ్య గుణన మాత్రిక అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానం.

$\therefore$ M మాత్రిక పరిమాణం = 1×2

$M = (a \quad b)$ అనుకొంటే...

$(a \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$

$(a+0 \quad 2a+5b) = (2 \quad 3)$

సదృశ్య మూలకాలను పోల్చితే...

$a = 2$

$2a + 5b = 3$

$2 \times 2 + 5b = 3$

$5b = 3 - 4$

$b = -1/5$

$\therefore M = (2 \quad -1/5)$

3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **అయినప్పుడు $B + B^{-1} = 4I$ అని చూపించండి?**

Sol:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ అయితే $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$B + B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-2 \\ 1-1 & 3+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$= 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 4I$

$\therefore B + B^{-1} = 4I$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **అయితే $A^2 + BC$ కనుక్కోండి?**

Sol:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+8 & 4+4 \\ 2+2 & 8+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

$BC = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3+0 & 0+4 \\ 4+0 & 0+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 + BC = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9-3 & 8+4 \\ 4+4 & 9+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 9 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & -3\\ 9 & y\end{pmatrix}$; $BA=I_{2\times2}$ అయితే x, yలను కనుక్కోండి?

Sol:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 9 & 7\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}x & -3\\ 9 & y\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}x & -3\\ 9 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 9 & 7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4x-27 & 3x-21\\ 36+9y & 27+7y\end{pmatrix}$$

లెక్క ప్రకారం $BA=I_{2\times2}$

$$=\begin{pmatrix}4x-27 & 3x-21\\ 36+9y & 27+7y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

సదృశ్య మూలకాన్ని పోల్చగా...

$3x-21=0$ $\quad$ $36+9y=0$

$3x=21$ $\quad$ $9y=-36$

$x=21/3$ $\quad$ $y=-36/9$

$x=7$ $\quad$ $y=-4$

$\therefore x=7, y=-4$

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ అయితే $A+A^T$ కనుక్కోండి?

Sol:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A+A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+1 & 3+5\\ 5+3 & 6+6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 8 & 12\end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ -1\end{pmatrix}$ అయితే pని కనుక్కోండి?

Sol:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-3\\ 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ -1\end{pmatrix}$$

$\therefore p=-1$

3. $\begin{vmatrix}d-2 & 5\\ -4 & 2\end{vmatrix}=0$ అయితే d విలువ ఎంత?

Sol:

$$\begin{vmatrix}d-2 & 5\\ -4 & 2\end{vmatrix}=0$$

$2(d-2)-5(-4)=0$

$2d-4+20=0$

$2d+16=0$

$2d=-16$

$d=-16/2=-8$

4. $X+2I=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ అయితే X మాత్రిక కనుగొనండి.

$$X+2I=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-2 & -1-0\\ 1-0 & 2-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ అయితే $A-B+x=0$ అయితే X మాత్రిక కనుక్కోండి?

Sol:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

$A-B+X=0$ కాబట్టి

$X=-A+B$

$X=B-A$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & 4-2\\ 3-3 & 5-4\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

గణన

కంప్యూటర్: విషయ పరిజ్ఞానాన్ని గ్రహించి, నిలువ ఉంచుకొని తగు రీతిలో ఎంతో వేగంగా గణించే ఒక ఎలక్ట్రానిక్ పరికరం.

కంప్యూటర్ విభాగాలు: కీబోర్డు, మానిటర్ (తెర), కేంద్ర విధాన విభాగం.

కంప్యూటర్ ప్రోగ్రాం: ఒక సమస్యను గణించడానికి కావలసిన సూచనలను ఒక నిర్ణీత పద్ధతిలో అమర్చిన దానిని కంప్యూటర్ ప్రోగ్రాం అంటారు.

కంప్యూటర్‌లో ముఖ్య పరికరాలు:

1. ఇన్‌పుట్ సాధనం
2. కేంద్రవిధాన విభాగం
3. ఔట్‌పుట్ సాధనం

కేంద్ర విధాన విభాగం: జ్ఞప్తి లేదా భద్రపరిచే స్థలం, నియంత్రణ పరికరం, అంకగణిత తార్కిక విభాగాల సమూహాన్ని కేంద్ర విధాన విభాగం అంటారు.

ఒక మార్కు ప్రశ్నలు

1. అల్గారిథమ్ అంటే ఏమిటి?

- ఒక సమస్యను కంప్యూటర్‌పై సాధన చేయడానికి జారీ చేసిన ఆజ్ఞ సోపాన క్రమంలో తయారుచేసే, సోపాన క్రమ విధానాన్ని సాంకేతికంగా అల్గారిథమ్ అంటారు.

2. క్రమచిత్రం అంటే ఏమిటి?

- సమస్య సాధనకు రాసిన అల్గారిథమ్‌కు, బొమ్మలతో కూడిన వర్ణనను క్రమచిత్రం అంటారు.

3. కంప్యూటర్ 4 భాషలను రాయండి?

- BASIC, COBOL, FORTRAN, PASCAL, JAVA, ORACLE

4. లూప్ ఉపయోగం ఏమిటి?

- ''ఫలానా సోపానం దగ్గరకు వెళ్లు' అనే ఆజ్ఞ క్రమచిత్రంలో సూచించే ఈ ఆజ్ఞ వల్ల సోపాన క్రమాన్ని కుదించడానికి, ఆజ్ఞల సంఖ్యను తగ్గించడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

5. ప్రోగ్రామింగ్ లాంగ్వేజ్ అంటే ఏమిటి?

- అల్గారిథమ్‌ను కంప్యూటర్‌కు అర్థమయ్యే భాషలోకి తర్జుమా చేసి కంప్యూటర్‌కు అందించే భాషను ప్రోగ్రామింగ్ లాంగ్వేజ్ అంటారు.

6. కంప్యూటర్ హార్డ్‌వేర్ విభాగం అంటే ఏమిటి?

- కంప్యూటర్‌లో ఉన్న భౌతికభాగాలు ఏవైతే మనం చేతితో స్పృశించగలమో వాటిని కంప్యూటర్ హార్డ్‌వేర్ అంటారు.

7. అల్గారిథమ్‌ను రాసేటప్పుడు గుర్తుంచుకోవాల్సిన విషయాలు తెల్పండి?

- 1. కాలాన్ని వృథాచేయకపోవడం
  2. సార్వత్రికంగా వినియోగించడం
  3. నిరాడంబరంగా ఉంచడం
  4. సమస్యను కూలంకషంగా చర్చించి సాధించడం

8. ఒకటి, రెండు, మూడు, నాల్గోతరం కంప్యూటర్‌లలో వేటిని ఉపయోగిస్తారు?

- ఒకటోతరం – శూన్య నాళికలు
  రెండోతరం – చిన్న ట్రాన్సిస్టర్‌లు
  మూడోతరం – ఎలక్ట్రానిక్ వలయాలు
  నాల్గోతరం – భారీ సమకాలీన ఎలక్ట్రానిక్ వలయాలు

9. C.P.U. అంటే ఏమిటి? కంప్యూటర్ పితామహుడని ఎవరిని పిలుస్తారు?

- C.P.U. Central Processing Units (కేంద్ర విధాన విభాగం)
  కంప్యూటర్ పితామహుడు – చార్లెస్ బాబేజ్

రెండు మార్కుల ప్రశ్నలు

1. సమస్య సాధనలో మౌలిక సోపానాలేవి?

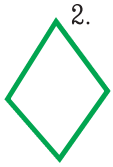
1. ముందుగా సమస్యను కూలంకషంగా చర్చించి జాగ్రత్తగా విశ్లేషణ చేయాలి.
2. తీసుకున్న సమస్యకు సరిపడే అల్గారిథమ్ రాయాలి.
3. రాసిన అల్గారిథమ్‌కు సరైన క్రమచిత్రాన్ని గీయండి.
4. అల్గారిథమ్‌కు సరైన ప్రోగ్రామ్‌ను రాసి, కంప్యూటర్‌కు అందించాలి.

2. క్రమచిత్రంలో వాడే వివిధ రకాల పెట్టెలను తెలపండి?

1. దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టె



2. రాంబస్ లేదా డైమండ్ ఆకారం పెట్టె



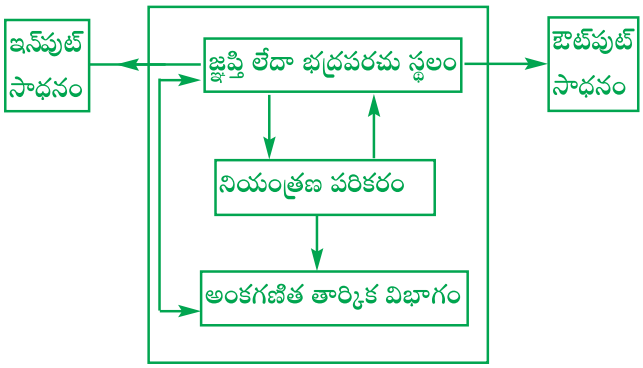
3. అంత్య (తుది) పెట్టె



4. ఇన్‌పుట్ – అవుట్‌పెట్‌పెట్టె



3. కంప్యూటర్ నిర్మాణ నమూనాను గీయండి?



4. కంప్యూటర్ చేయగలిగే పనులు ఏవి?

– ఇచ్చిన పనిని ఎంతో విధేయతతో అమలుపరచడం, ఎంతో వేగంతో ఖచ్చితమైన గణనలను చేయడం, విసుగు చెందనితత్వం, ఎంతో సమాచారాన్ని భద్రపరచడం వంటివి కంప్యూటర్ చేస్తుంది.

5. కంప్యూటర్‌పై సమస్యలను సాధించే దిశలో అల్గారిథమ్, క్రమచిత్రాల ప్రాముఖ్యతను వివరించండి?

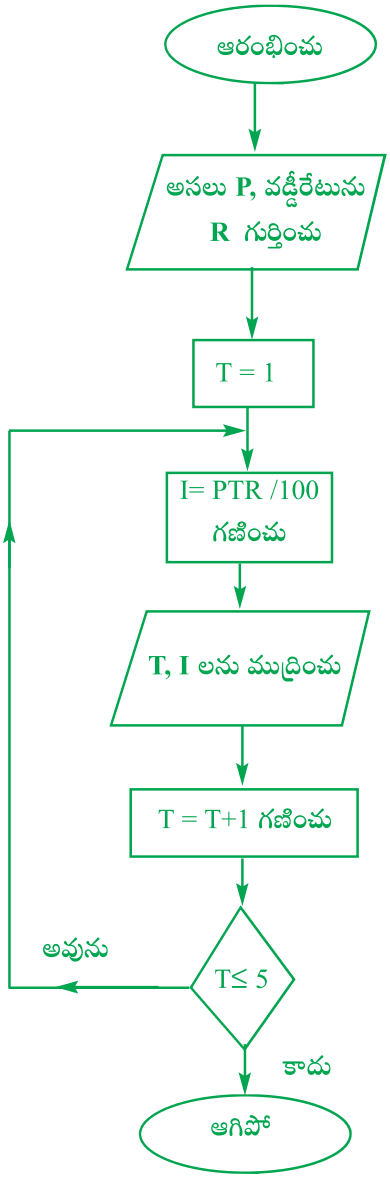
1. తాత్కాలికంగా, స్పష్టంగా పథకాన్ని తయారుచేసేందుకు సహాయపడతాయి.
2. కార్యక్రమ నిర్వహణ చేసే వ్యక్తికి తను ఎంచుకొన్న భాషలో ప్రోగ్రాం రాయడానికి ఎంతగానో ఉపకరిస్తుంది.
3. ఎవరికైనా, ఎపుడైనా విశ్లేషణ సులభంగా అర్థమవడానికి సహాయపడుతుంది.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. అసలు వడ్డీరేటు ఇచ్చినపుడు, మొదటి సంవత్సరాంతం నుంచి 5 సంవత్సరాలు పూర్తి అయ్యేవరకు ప్రతి సంవత్సరాంతానికి అయ్యే సాధారణ వడ్డీని కనుక్కోవడానికి అల్గారిథమ్ రాసి దానికి సరిపడు క్రమచిత్రాన్ని గీయండి?

అల్గారిథమ్

సోపానాల సంఖ్య	ఆజ్ఞ (సోపానం)
1.	అసలు, వడ్డీరేటును P,R లుగా గుర్తించండి.
2.	T = 1 గా తీసుకోండి (T కాలం)
3.	I = PTR/100ను గణన చేయండి
4.	T, Iలను రాయండి
5.	T = T+1 గణింపచేయండి.
6.	T≤5 అయిన 3,4,5 సోపానాలను పూర్తి చేయండి

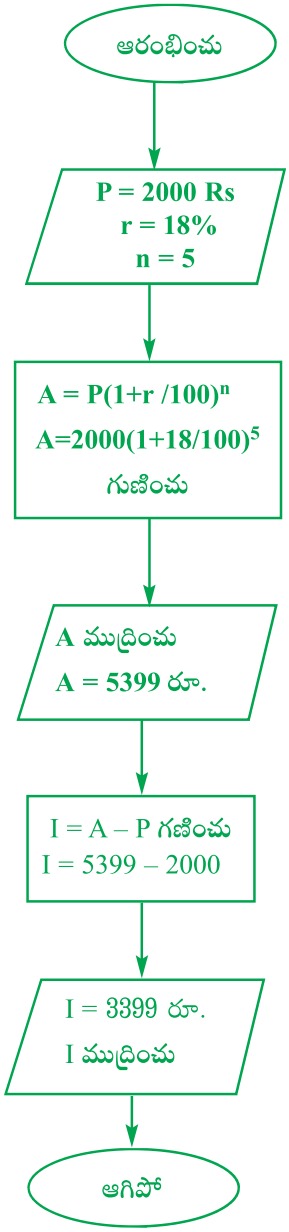


2. అసలు P, r శాతం చక్రవడ్డీతో 5ఏళ్ల కాలాంతానికి అయ్యే మొత్తానికి చక్రవడ్డీని కనుక్కోండి. P = రూ. 2000, r = 18% లకు పై దత్తాంశానికి అల్‌గారిథమ్‌ను రాసి, క్రమచిత్రాన్ని గీయండి?

– అల్‌గారిథమ్

1. అసలు P, వడ్డీరేటు R, కాలం nలను ఇవ్వు
2. $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ను గణించండి.
3. A విలువ ముద్రించు.
4. I = A– P గణించు
5. I విలువ ముద్రించు
6. ఆగిపో.

క్రమచిత్రం



3. గోపాల్ ఒక రేడియోను 500రూ. లకు కొని 600 రూ.లకు అమ్మాడు. ఈ దత్తాంశానికి లాభంగానీ, నష్టంగానీ నిర్ణయించడానికి క్రమచిత్రాన్ని గీయండి?

