సగటు-3

విభిన్న గ్రూపుల సగటు:

ఒక గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'P', సగటు 'x', మరొక గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'q', సగటు 'y' అయితే ఆ రెండు గ్రూపులను కలిపితే ఏర్పడే మిశ్రమ గ్రూపు సగటు =

$$\frac{Px+qy}{P+q}$$

ఒకవేళ మూడు గ్రూపులు ఉన్నట్లయితే (మూడో గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'r', సగటు 'z' అయితే), మిశ్రమ గ్రూపు సగటు =

$$\frac{Px+qy+rz}{P+q+r}$$

ఉదాహరణ:

1000 మంది ఉద్యోగులు ఒక కంపెనీలో ఉద్యోగి సగటు జీతం రు. 10,000. పురుష ఉద్యోగుల సగటు జీతం రు. 10,400, మహిళా ఉద్యోగుల సగటు జీతం రు. 8,400. అయితే కంపెనీలోని మహిళా ఉద్యోగుల శాతమెంత?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1-మోడల్ పేపర్ 2007)

సమాధానం:

పురుష ఉద్యోగుల సంఖ్య = 'x' అను కుంటే, మహిళా ఉద్యోగుల సంఖ్య = '$1000-x$' అవుతుంది. అప్పుడు మిశ్రమ గ్రూపు సగటు సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{10,400x+8,400(1000-x)}{x+1000-x}=10,000$$

$\Rightarrow 84,00,000 + 2,000x = 1,00,00,000$

$\Rightarrow 2,000x = 16,00,000$

$\Rightarrow x = 800$

$\therefore$ మహిళా ఉద్యోగుల సంఖ్య = $1000-x$

$= 1000 - 800 = 200$

మహిళా ఉద్యోగుల శాతం= $\frac{200}{1000}\times 100 = 20$

∴ కంపెనీలో 20% మహిళా ఉద్యోగులు ఉన్నారు.

ఉదాహరణ:

ఒక తరగతిలోని మొత్తం 100 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 56. మొదటి 20 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 85. చివరి 40 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 20. అయితే మిగిలిన విద్యార్థుల సగటు మార్కులు ఎంత?

సమాధానం:

మొదటి 20, చివరి 40 మంది విద్యార్థులను మినహాయిస్తే, మిగిలిన విద్యార్థులు

$= 100 - 20 - 40 = 40$

ఈ 40 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు = 'x' అనుకుంటే, అప్పుడు మిశ్రమ గ్రూపు సగటు సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{20\times85+40\times20+40x}{20+40+40}=56$$

$$\Rightarrow 1700 + 800 + 40x = 5,600$$

$$\Rightarrow 40x = 3,100$$

$$\Rightarrow x=\frac{3,100}{40}=77.5$$

∴ మిగిలిన విద్యార్థుల సగటు మార్కులు

$= 77.5$

సగటు-రకాలు

గణితపు సగటు మూడు రకాలు:

1. అంకగణితపు సగటు లేదా మధ్యమం:

సగటు లేదా సరాసరి అంటే సాధారణంగా అంక మధ్యమం అనే అర్థం. దీన్ని మనం ఇదివరకే చర్చించాం.

2. గుణ మధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3,.....x_n$ అనే రాశుల గుణ మధ్యమం = $(x_1.x_2.x_3.....x_n)^{\frac{1}{n}}$

$$= \sqrt{ab}$$

a, b అనే రెండు రాశుల గుణ మధ్యమం

ఉదాహరణ:

9, 4ల గుణ మధ్యమం ఎంత?

సమాధానం:

గుణ మధ్యమం = $\sqrt{9\times4}$

$\sqrt{36}$

$= 6$

3. హరాత్మక మధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ అనే రాశుల హరాత్మక మధ్యమం

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

- a, b అనే రెండు రాశుల హరాత్మక

  మధ్యమం = $\frac{2ab}{a+b}$

- a, b, c అనే మూడు రాశుల హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$
- ఇచ్చిన ఏదైన దత్తాంశానికి పై మూడు రకాల సగటులను కనుక్కోవచ్చు. వాటి మధ్య సంబంధం ఈ విధంగా ఉంటుంది.

  అంక మధ్యమం ≥ గుణ మధ్యమం ≥ హరాత్మక మధ్యమం.
- ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులు సమా నంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే పై మూడు సగటులు కూడా సమానంగా ఉంటాయి.
- హరాత్మక మధ్యమానికి కింది రెండు ఉప యోగాలు ఉన్నాయి.

1. సగటు వేగం:

వివిధ దశల్లో ప్రయాణించిన దూరం స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు ఆయా దశల్లోని వేగాల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

2. సగటు ధర:

ఒక వస్తువు కొనుగోలుపై వివిధ కాలాల్లో సమాన పెట్టుబడులు పెట్టినప్పుడు ఆయా కాలాల్లో ఆ వస్తువు ధరల హరాత్మక మధ్య మమే ఆ వస్తువు సగటు ధర అవుతుంది.

ఉదాహరణ:

ఒక వ్యక్తి P నుంచి Qకు గంటకు 3 కి.మీ. వేగంతో చేరుకున్నాడు. మళ్లీ తిరిగి Q నుంచి Pకి గంటకు 6 కి.మీ. వేగంతో చేరాడు. అయితే అతని సగటు వేగం గంటకు ఎంత? **(గ్రూప్–2, 2008)**

సమాధానం:

P నుంచి Qకు, Q నుంచి Pకి సమాన దూరం ఉంటుంది కాబట్టి ఆ రెండు వేగాల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

$\therefore$ సగటు వేగం $= \dfrac{2\times3\times6}{3+6}$

$$\frac{36}{9} = 4$$

$\therefore$ సగటు వేగం గంటకు 4 కి.మీ.

ఉదాహరణ:

నీవు 20 KMPH వేగంతో A నుంచి Bకి, B నుంచి Aకి 60 KMPH వేగంతో ప్రయాణిస్తే నీ సరాసరి వేగం ఎంత? నీ మిత్రుడు X నుంచి Yకి స్థిరంగా 30 KMPH వేగంతో ప్రయాణించి అర్ధగంటలో చేరుకున్నాడు. Y నుంచి Zకి 40 KMPH వేగంతో ప్రయాణించి ఒకటిన్నర గంటల్లో చేరుకుంటే నీ మిత్రుడి సగటు వేగం ఎంత?

(గ్రూప్–1 మెయిన్స్ 2008)

సమాధానం:

నా సగటు వేగం $= \dfrac{2\times20\times60}{20+60}$

$$= \frac{2400}{80} = 30$$

$\therefore$ నా సగటు వేగం = 30 KMPH

దత్తాంశం నుంచి X, Yల మధ్య దూరం =

$$30\times\frac{1}{2}$$

= 15 కి.మీ.

Y, Zల మధ్య దూరం = $40 \times \frac{3}{2}$

$= 60$ కి.మీ.

X, Yల మధ్య దూరం, Y, Zల మధ్య దూరం సమానం కాదు కాబట్టి సగటు వేగం

$$= \frac{\text{మొత్తం దూరం}}{\text{మొత్తం కాలం}}$$

$$= \frac{15+60}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{75}{2} = 37.5$$

∴ నా మిత్రుడి సగటు వేగం = 37.5 KMPH

ఉదాహరణ:

నాలుగు వేర్వేరు నెలల్లో లీటరు పాల ధర రు. 18, రు. 20, రు. 22, రు. 25గా ఉంది. ఒక వ్యక్తి ఈ నాలుగు నెలల్లోనూ పాల కొనుగోలుపై సమానంగా ఖర్చు చేస్తే లీటరు పాల సగటు ధర ఎంత?

(సివిల్ సర్వీసెస్-మెయిన్స్, 2004)

సమాధానం:

నాలుగు నెలల్లోనూ పెట్టుబడి/ఖర్చు సమానంగా ఉంది కాబట్టి ఆయా ధరల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు ధర అవుతుంది.

∴ సగటు ధర = $\frac{4}{\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{25}}$

$$= \frac{4}{\frac{550+495+450+396}{9900}}$$

$$= \frac{4 \times 9900}{1891}$$

$= 20.9413$

∴ లీటరు పాల సగటు ధర = రు. 20.94

గమనిక:

a, b, c, d అనే నాలుగు రాశుల హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{4abcd}{abc+abd+acd+bcd}$ అనే సూత్రాన్ని కూడా పై సమస్యలో ఉపయోగించవచ్చు.