సాంఖ్యక శాస్త్రం-7

విస్తరణ కొలతలు

(Measures of Dispersion)

సగటు దత్తాంశం మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. అంటే ఒక దత్తాంశం సగటు తెలిస్తే, ఆ దత్తాంశం గురించి ప్రాథమిక అవగాహన ఏర్పడుతుంది. దత్తాంశం స్వభావాన్ని పూర్తిగా తెలుసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశంలోని రాశుల, సగటు మాత్రమే తెలిస్తే సరిపోదు. సగటుతో పాటు ఆ దత్తాంశంలో రాశులు ఏ విధంగా విస్తరించి ఉన్నాయో కూడా తెలిసి ఉంటే ఆ దత్తాంశం గురించి సరైన నిర్ణయాలు తీసుకునే వీలుంటుంది. ఈ అంశాన్ని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం. A, B అనే రెండు కంపెనీల్లో పని చేస్తున్న 500 మంది ఉద్యోగుల వేతనాలు కింది విధంగా ఉన్నాయనుకోండి.

ఉద్యోగుల సంఖ్య	A కంపెనీలో ఒక్కొక్కరి జీతం (రూ.లలో)	B – కంపెనీలో ఒక్కొక్కరి జీతం (రూ.లలో)
100	1,000	4,000
100	2,000	6,000
100	2,500	5,000
100	1,500	5,500
100	18,000	4,500

మొత్తం=500

ప్రతి కంపెనీలో 500 మంది ఉద్యోగులు పని చేస్తున్నారు. రెండు కంపెనీల్లోనూ ఒక ఉద్యోగి సగటు వేతనాన్ని కనుగొందాం.

A కంపెనీలో ఉద్యోగి సగటు వేతనం (₹ల్లో)=100×(1000+2000+2500+1500+18,000) / (100 +100 +100 +100 +100)

= 5,000

ఇదే విధంగా, B కంపెనీలో సగటు వేతనం = ₹. 5,000. అంటే A, B రెండు కంపెనీలలో కూడా సగటు వేతనాలు సమానంగా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు ఈ రెండు కంపెనీల్లో ఏదో ఒక కంపెనీలో చేరాలని అనుకునే సగటు నిరుద్యోగి ఉన్నాడనుకోండి. అతనికి కేవలం ఆ రెండు కంపెనీల్లోని సగటు వేతనాలు మాత్రమే తెలిస్తే ఆ రెండు కంపెనీల్లో ఉద్యోగుల వేతనాలు సమాన స్థాయిలోనే ఉన్నాయని అనుకునే ప్రమాదముంది. రెండు కంపెనీల్లోని సగటు వేతనాలతో పాటు ఉద్యోగుల జీతాలు ఎలా విస్తరించి ఉన్నాయో కూడా గమనించాలి.

A కంపెనీలో మెజారిటీ ఉద్యోగుల (400 మంది) జీతాలు కేవలం ₹. 1000 – 2500 పరిధిలో ఉండగా 100 మంది ఉద్యోగుల జీతాలు మాత్రం ₹. 18,000గా ఉన్నాయి. అంటే ఈ కంపెనీలో జీతాలు ఎక్కువ పరిధిలో విస్తరించి ఉన్నాయి లేదా ఉద్యోగుల జీతాల్లో అసమానతలు ఎక్కువగా ఉన్నాయి. ఇందుకు భిన్నంగా B - కంపెనీలో అందరి వేతనాలు ₹. 4000–6000 పరిధిలోనే విస్తరించి ఉన్నాయి. అంటే ఇక్కడ జీతాల్లో అసమానతలు తక్కువగా ఉన్నాయి లేదా జీతాల్లో స్థిరత్వం లేదా నిలకడ ఎక్కువగా ఉందని చెప్పొచ్చు. కాబట్టి A కంటే B కంపెనీలో చేరడానికి ప్రాధాన్యమివ్వాలి.

విస్తరణ కొలతల్లో ప్రధానమైనవి 5

1. వ్యాప్తి (Range)
2. మధ్యమ విచలనం/సగటు విచలనం (Mean Deviation)
3. చతుర్థాంశ విచలనం (Quartile Deviation)
4. ప్రామాణిక విచనలం (Standard Deviation)
5. లారెంజ్ వక్రం (Lorenz Curve)

పరీక్షల దృష్ట్యా వ్యాప్తి, మధ్యమ విచలనం ప్రామాణిక విచలనాలు అవసరం.

వ్యాప్తి: వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో, విచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో వ్యాప్తి = గరిష్ట రాశి – కనిష్ట రాశి

వ్యాప్తి గుణకం = గరిష్టరాశి–కనిష్టరాశి/ గరిష్టరాశి+కనిష్టరాశి

వ్యాప్తి గుణకానికి ప్రమాణాలు ఉండవు. ఇది ఎప్పుడూ 0, 1ల మధ్యనే ఉంటుంది.

ఉదా: i) 9, 12, 15, 18, 21

ii) 1, 8, 15, 22, 29

మొదటి శ్రేణి వ్యాప్తి = 21–9 = 12

వ్యాప్తి గుణకం=21–9/21+9 =12/30=0.4

రెండో శ్రేణి వ్యాప్తి = 29–1=28

వ్యాప్తి గుణకం =29–1/29+1 = 28/30 = 0.933

ప్రాధాన్యత: వ్యాప్తి లేదా వ్యాప్తి గుణకం తక్కు వగా ఉన్న దత్తాంశంలో స్థిరత్వం/నిలకడ (StasilityIConsistency) ఎక్కువగా ఉన్నట్లు.

పై ఉదాహరణలో రెండో శ్రేణి కంటే మొదటి శ్రేణిలో స్థిరత్వం లేదా నిలకడ ఎక్కువ అని చెప్పొచ్చు.

ఉదా: కింది దత్తాంశ వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాలు గణించండి.

మార్కులు	3	5	10	15	20
విద్యార్థుల సంఖ్య	20	30	40	50	10
మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య			150		

సమాధానం: విచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో వ్యాప్తిని గణించాలంటే పౌనఃపున్యాలతో అవసరం లేదు. దత్తాంశం

ప్రకారం గరిష్ట మార్కులు = 20, కనిష్ట మార్కులు = 3. ∴ వ్యాప్తి=20–3=17 మార్కులు

వ్యాప్తి గుణకం = 20–3/20+3 =17/23 = 0.73

ఉదా: కింది దత్తాంశ వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాలు గణించండి.

ఆదాయంకుటుంబాల సంఖ్య (₹ వేలల్లో)	
1 - 4	9
5 - 8	15
9 -12	20
13 - 16	3
మొత్తం	47

సమాధానం: పౌనఃపున్య విభాజనంలో వ్యాప్తి గణించాలంటే పౌనఃపున్యాలతో అవసరం లేదు. దత్తాంశం నుంచి గరిష్ట ఆదాయం = ₹.16,000

కనిష్ట ఆదాయం = ₹. 1000

∴ వ్యాప్తి = 16000–1000 = ₹. 15,000

వ్యాప్తి గుణకం = 16000–1000/

16000+1000 = 15000/17000 = 0.88

నోట్: వ్యాప్తిని సులభంగా గణించొచ్చు, సులభంగా అవగాహన చేసుకోవచ్చు. కానీ దత్తాంశంలోని విస్తరణను కొలవడానికి ఇది అంత కచ్చితమైన కొలత కాదు.

మధ్యమ విచలనం: దత్తాంశంలోని రాశుల సగటు నుంచి ఆయా రాశుల విచనాల పరమ మూల్యాల అంకమధ్యమాన్ని మధ్యమ విచలనం అంటారు. ఈ నిర్వచనంలో సగటు అంటే అంకమధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళ్యకంల్లో ఏదైనా కావొచ్చు. ఐతే సాధారణంగా అంకమధ్యమాన్ని తీసుకుంటాం. ఈ నిర్వచనం ప్రకారం $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ల మధ్యమ విచలనం =

$$= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$$

$x_i \rightarrow$ ఆయా రాశులు

$\bar{x} \rightarrow$ రాశుల సగటు

$n \rightarrow$రాశుల సంఖ్య

ప్రాధాన్యత: మధ్యమ విచలనం తక్కువగా ఉన్న దత్తాంశంలో నిలకడ/స్థిరత్వం ఎక్కువగా ఉన్నట్లు.

ఉదా: A, B అనే రెండు యంత్రాలు బిస్కెట్లు ప్యాక్ చేయడానికి వాడుతున్నారు. ఒక్కో బిస్కెట్ ప్యాకెట్ బరువు 200 గ్రాములు ఉండాలి. ప్రతి యంత్రం నుంచి 10 శాంపిల్ బిస్కెట్ ప్యాకెట్లను సేకరించి వాటి బరువు తూస్తే ఈ విధంగా నమోదయ్యాయి (గ్రాముల్లో).

యంత్రం A: 196, 198, 198, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 205

యంత్రం B: 194, 194, 195, 198, 200, 201, 201, 204, 206, 207.

ఐతే మధ్యమ విచలనాన్ని ఉపయోగించి రెండింటిలో ఏ యంత్రం ఎక్కువ కచ్చితమైందో కనుక్కోండి. (సివిల్స్, మెయిన్స్-2002)

సమాధానం: యంత్రం 'A' నుంచి సేకరించిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు $\bar{x}$ = బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువుల మొత్తం/బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సంఖ్య

= 196+198+198+....+205/10

= 2000/10 = 200 గ్రాములు

ఇదే విధంగా యంత్రం 'B' నుంచి సేకరించిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు

= 194+194+195+....+207/10

= 2000/10 = 200 గ్రాములు

ఇక్కడ సగటు బరువు అంటే బరువుల అంకమధ్యమం అనే విషయాన్ని గమనించాలి. రెండు యంత్రాలు ప్యాక్ చేసిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువులు సమానంగా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు మధ్యమ విచలనాన్ని ఉపయోగించి ఏ యంత్రం బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువులు ఎక్కువ నిలకడ లేదా స్థిరత్వాన్ని ప్రదర్శిస్తున్నాయో కనుగొందాం.

Aయంత్రం బరువు (x_i)	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	Bయంత్రం బరువు (y_i)	$\lvert y_i - \bar{y}\rvert$
196	4	194	6
198	2	194	6
198	2	195	5
199	1	198	2
200	0	200	0
200	0	201	1
201	1	201	1
201	1	204	4
202	2	206	6
205	5	207	7
$\sum\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	= 18	$\sum\lvert y_i - \bar{y}\rvert$	= 38

యంత్రం 'A నుంచి సేకరించిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువుల మధ్యమ విచలనం =

$= \frac{\Sigma \lvert x_i - \bar{x}\rvert}{n} = 18/10$

($\because$ n = బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సంఖ్య = 10)

= 1.8 గ్రాములు ..... (1)

ఇదే విధంగా యంత్రం B మధ్యమ విచలనం

= 38/10 = 3.8 గ్రాములు.....(2)

అంటే యంత్రం A ప్యాక్ చేసిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువులు 200 గ్రాములు (సగటు బరువు) నుంచి సగటున 1.8 గ్రాము విచలనాన్ని ప్రదర్శిస్తున్నాయి.

∴ (1), (2)ల నుంచి మధ్యమ విలచనం తక్కువగా ఉన్న యంత్రం –A నమ్మశక్యమైనదని చెప్పొచ్చు.

విచ్ఛిన్న శ్రేణుల మధ్యమ విలచనం:

మధ్యమ విచలనం = $\frac{\Sigma|f_i d_i|}{\Sigma f_i}$

$f_i \rightarrow$ పౌనఃపున్యం, $d_i = x_i - \bar{x}$

$xi \rightarrow$ ఆయా రాశులు,

$\bar{x} \rightarrow$ రాశుల సగటు

ఉదా: కింది దత్తాంశం మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

బరువులు (kg)	**వ్యక్తుల సంఖ్య**
30	20
35	30
40	30
45	20
మొత్తం	100

సమాధానం: దత్తాంశంలో ఇచ్చిన బరువులు రాశులు (x_i), వ్యక్తుల సంఖ్యను పౌనఃపున్యాలు (f_i) అనుకొని పట్టీకరించగా –

x_i	f_i	$f_i x_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	$\|f_i d_i\|$
30	20	600	30–37.5= – 7.5	150
35	30	1050	35–37.5 = –2.5	75
40	30	1200	40–37.5 = 2.5	75
45	20	900	45–37.5 = 7.5	150
Σf_i=100, $f_i x_i$=		3750	$\Sigma\|f_i d_i\|$=450	

పై దత్తాంశం అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

= 3750/100=37.5 kgs

ఇప్పుడు పై దత్తాంశం మధ్యమ విచలనం

$= \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = \frac{450}{100} = 4.5 \text{kgs}$

అంటే సగటున విద్యార్థుల బరువులు 37.5 kgs నుంచి 4.5 kgs విచలనాన్ని కలిగి ఉంటాయని అర్థం.

పౌనఃపున్య విభాజనం మధ్యమ విచలనం:

మధ్యమ విచలనం $= \frac{\Sigma | f_i d_i |}{\Sigma f_i}$

$f_i \rightarrow$ పౌనఃపున్యం, $d_i = x_i - \bar{x}$

$x_i \rightarrow$ తరగతి మధ్యవిలువ $\bar{x} \rightarrow$ సగటు

ఉదా: ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులకు ఒక పరీక్ష లో వచ్చిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి. మార్కుల మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

మార్కులు	**విద్యార్థుల సంఖ్య**
10-20	30
20-30	20
30-40	20
40-50	30
మొత్తం	100

సమాధానం: తరగతి మధ్య విలువ (x_i) = దిగువహద్దు+ఎగువహద్దు/2 అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఆయా తరగతుల మధ్య విలువలు కనుగొని పట్టీకరించగా –

x_i	f_i	$f_i x_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	$\lvert f_i d_i \rvert$
15	30	450	15–30 = – 15	450
25	20	500	25–30 = – 5	100
35	20	700	35–30 = 5	100
45	30	1350	45–30 = 15	450
$\Sigma f_i=100, \Sigma f_i x_i=3000$				$\Sigma \lvert f_i d_i \rvert=1100$

పై దత్తాంశం అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$= 3000/100 = 30$ మార్కులు

పై దత్తాంశం మధ్యమ విచలనం $= \frac{\Sigma | f_i d_i |}{\Sigma f_i}$

$= 1100/100 = 11$ మార్కులు

నోట్: జాతీయాదాయం పంపిణీలోని అసమానతలు గణించడానికి సాధారణంగా మధ్యమ విచలనాన్నే వాడుతారు.