# సాంఖ్యక శాస్త్రం-6

## ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం

గత సంచికలో ప్రామాణిక విచలనాన్ని ఏ విధంగా గణించాలో చర్చించాం. ఈ సంచికలో ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం, రాశులను పొరపాటుగా తీసు కున్నప్పుడు సరైన ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కో వడం అనే అంశాల గురించి చర్చిద్దాం.

**ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం:**

మొదటి సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య = $N_1$,

వాటి అంకమధ్యమం = $X_1$,

ప్రామాణిక విచలనం = $\sigma_1$,

రెండో సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య = $N_2$,

వాటి అంకమధ్యమం = $X_2$,

ప్రామాణిక విచలనం = $\sigma_2$ అనుకొంటే...

ఇప్పుడు మొదట పై రెండు సమూహాల ఉమ్మడి అంకమధ్యమం $(X)$ కనుక్కోవాలి.

$$X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$$

$d_1 = X_1 - X$,

$d_2 = X_2 - X$ అని అనుకుంటే....

పై రెండు సమూహాల ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచ లనం $(\sigma)$ను కింది సూత్రం ద్వారా కనుక్కో వచ్చు.

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

పై రెండు సమూహాల ఉమ్మడి విస్తృతి

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

పై సూత్రాలను ఎన్ని సమూహాలకు అయినా అదే పద్ధతిలో విస్తరించి రాసుకోవచ్చు.

**ఉదాహరణ:**

150 మంది విద్యార్థులున్న ఒక తరగతి సగటు బరువు 60 కేజీలు. ఆ తరగతిలోని బాల, బాలికల సగటు బరువులు వరుసగా 70, 55 కేజీలు. వారి బరువుల ప్రామాణిక విచలనాలు వరుసగా 10, 15 కేజీలు. అయితే ఆ తరగతిలోని బాలుర సంఖ్య ఎంత? మొత్తం తరగతి ప్రామాణిక విచలనం ఎంత?

**సమాధానం:**

తరగతి బాలుర సంఖ్య = $b$ అనుకుంటే...

బాలికల సంఖ్య = $150 - b$ అవుతుంది.

బాలురను మొదటి సమూహంగానూ, బాలికలను రెండో సమూహంగానూ పరిగణించినట్లయితే,

$N_1 = b, \quad X_1 = 70$ Kgs,

$\sigma_1 = 10$ Kgs,

$N_2 = 150 - b, X_2 = 55$ Kgs,

$\sigma_2 = 15$ Kgs.

రెండు సమూహాల ఉమ్మడి సగటు బరువు $(X)$ = 60 కేజీలు
కాని ఉమ్మడి సగటు $X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$

$$\Rightarrow 60 = \frac{b \times 70 + (150 - b) \times 55}{b + 150 - b}$$

$\Rightarrow 60 \times 150 = 70b + 8{,}250 - 55b$

$\Rightarrow 15b = 9{,}000 - 8{,}250 = 750$

$\Rightarrow b = 750/15 = 50$

$\therefore$ తరగతిలోని బాలుర సంఖ్య $(N_1) = 50$

అలాగే బాలికల సంఖ్య $(N_2)=100$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు మొత్తం తరగతి ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొందాం.

$d_1 = X_1 - X = 70 - 60 = 10$

$d_2 = X_2 - X = 55 - 60 = -5$

$\Rightarrow {d_1}^2 = 100, {d_2}^2 = 25$ అలాగే...

$\sigma_1^2 = 100, \sigma_2^2 = 225$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం,

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{50(100 + 100) + 100(225 + 25)}{50 + 100}}$$

$$= \sqrt{\frac{50 \times 200 + 100 \times 250}{150}}$$

$$= \sqrt{\frac{10{,}000 + 25{,}000}{150}}$$

$= \sqrt{\frac{35,000}{150}} = \sqrt{233.33}$

$= 15.275$

∴ మొత్తం తరగతి ప్రామాణిక విచలనం

= 15.275 కేజీలు.

**గమనిక:**

1. విభిన్న సమూహాల ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచ లనం ఆయా సమూహాల వ్యక్తిగత ప్రామాణిక విచలనాల్లో గరిష్ట ప్రామాణిక విచలనం కంటే ఎక్కువ ఉంటుంది.
2. మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనం

$= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$

**ఉదాహరణ:**

60 రాశులున్న ఒక సమితి అంకమధ్యమం, విస్తృతులు వరుసగా 10, 4. ఈ సమితిలోని 40 రాశుల అంకమధ్యమం, విస్తృతులు వరుసగా 11, 2.25 అయితే మిగిలిన 20 రాశుల అంకమధ్యమం, విస్తృతులను కనుక్కోండి.

**(సివిల్ సర్వీసెస్, మెయిన్స్, 2003)**

**సమాధానం:**

40 రాశులను మొదటి సమూహంగా, మిగిలిన 20 రాశులను రెండో సమూహం గానూ భావిద్దాం. అప్పుడు..

$N_1 = 40,\ X_1 = 11,\ \sigma_1^2 = 2.25$

$N_2 = 20,\ X_2 = ?,\ \sigma_2^2 = ?$

ఉమ్మడి సగటు $X = 10$, ఉమ్మడి విస్తృతి

$\sigma^2 = 4$ కాని ఉమ్మడి సగటు

$$X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{40 \times 11 + 20X_2}{40 + 20}$$

$\Rightarrow 10 \times 60 = 440 + 20\ X_2$

$\Rightarrow 20\ X_2 = 600 - 440 = 160$

$\Rightarrow X_2 = 160/20 = 8$

∴ మిగిలిన 20 రాశుల అంకమధ్యమం = 8

$d_1 = 11 - 10 = 1$

$d_2 = 8 - 10 = -2$

అలాగే... ఉమ్మడి విస్తృతి

$$\sigma^2 = \frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{40(2.25+1) + 20(\sigma_2^2 + 4)}{40 + 20}$$

$$\Rightarrow 4 \times 60 = 40 \times 3.25 + 20\sigma^2_2 + 80$$

$$\Rightarrow 20\sigma_2^2 = 240 - 80 - 130$$

$$\Rightarrow \sigma_2^2 = 30/20 = 1.5$$

$\therefore$ మిగిలిన 20 రాశుల విస్తృతి = 1.5

**రాశులను పొరపాటుగా తీసుకోవడం:**

ఈ అంశాన్ని చర్చించే ముందు వ్యక్తిగత శ్రేణులకు సంబంధించి ప్రామాణీయ విచల నానికి మరొక సూత్రాన్ని గుర్తుంచుకోవాలి.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

ఇక్కడ 'n' అంటే వ్యక్తిగత శ్రేణిలోని రాశుల సంఖ్య

$x_i$ అనేవి రాశులు,

$\bar{x}$ అనేది ఆ రాశుల అంకమధ్యమం

$$\Sigma x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n^2$$

అంటే రాశుల వర్గాల మొత్తం.

పై సూత్రంలో ఇరువైపులా వర్గం చేస్తే

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i^2 = n\left(\sigma^2 + (\bar{x})^2\right)$$

అంటే రాశుల వర్గాల మొత్తం =

$$n\left(\sigma^2 + (\bar{x})^2\right)$$

ఈ సూత్రాన్ని కూడా గుర్తుంచుకోవాలి.

**ఉదాహరణ:**

ఒక తరగతిలోని '9' మంది విద్యార్థుల బరువుల సగటు, ప్రామాణిక విచలనాలు వరుసగా 43 కేజీలు, 5 కేజీలు ఆ తరగతిలోకి కొత్తగా 63 కేజీలు ఉండే విద్యార్థి చేరిన తర్వా త ఆ తరగతి సగటు బరువు, ప్రామాణిక విచలనాలు కనుక్కోండి.

**సమాధానం:**

దత్తాంశం ప్రకారం, ప్రారంభంలో తరగతిలోని '9' మంది విద్యార్థుల బరువుల మొత్తం = 43 × 9 = 387 కేజీలు.

63 కేజీల బరువుండే విద్యార్థి చేరిన తరువాత తరగతిలోని '10' మంది విద్యార్థుల బరువుల మొత్తం = 387 + 63 = 450 కేజీలు.

$\Rightarrow$ ప్రస్తుతం, తరగతి సగటు బరువు $= \frac{450}{10}$ = 45 కేజీలు.

ప్రారంభంలో తరగతిలోని '9' మంది విద్యార్థుల బరువుల వర్గాల మొత్తం = $= n\left(\sigma^2 + (\bar{x})^2\right)$

= 9 ($5^2$ + $43^2$) = 16,866

కొత్త విద్యార్థి చేరిన తర్వాత, 10 మంది విద్యార్థుల బరువుల వర్గాల మొత్తం

$\Sigma x_i^2$ = 16,866 + $63^2$

= 16866 + 3969 = 20835

ఈ '10' మంది విద్యార్థుల బరువుల ప్రామాణిక విచలనం

$= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$ $= \sqrt{\frac{20835}{10} - 45^2}$

$= \sqrt{2083.5 - 2025}$ $= \sqrt{58.5}$ = 7.65

∴ తరగతి ప్రామాణిక విచలనం = 7.65 కేజీలు.