సాంఖ్యక శాస్త్రం 4

విస్తరణ కొలతలు

దత్తాంశాన్ని సరిగ్గా అవగాహన చేసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశ కేంద్ర స్థానం కొలత (సగటు)తో పాటు ఆ దత్తాంశంలోని రాశులు ఏ విధంగా విస్తరించి ఉన్నాయో కూడ తెలుసుకోవాలి. కింది ఉదాహరణను పరిశీలిస్తే దత్తాంశం విస్తరణ కొలతల ఆవశ్యకత మనకు అర్థమవుతుంది.

ఉదాహరణ:

'A' అనే కంపెనీలోని ఆరుగురు ఉద్యోగుల జీతాలు రూ. 500, రూ. 500, రూ. 2,000, రూ. 3,000, రూ. 4,000, రూ. 20,000. 'B' అనే కంపెనీలోని ఆరుగురు ఉద్యోగుల జీతాలు రూ. 4,000, రూ. 3,500, రూ. 4,500, రూ. 6,000, రూ. 5,500, రూ. 6,500. ఉద్యోగంలో చేరాలనుకొనే అభ్యర్థి ఈ రెండు కంపెనీల్లో దేన్ని ఎంపిక చేసుకోవాలి?

సమాధానం:

'A' అనే కంపెనీలో ఉద్యోగుల సగటు జీతం =

$$\frac{\text{అందరి జీతాల మొత్తం}}{\text{ఉద్యోగుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{500+500+2000+3000+4000+20000}{6}$$

$$= \frac{30,000}{6} = \text{రూ. } 5,000$$

అదేవిధంగా, 'B' అనే కంపెనీలోని ఉద్యోగుల సగటు జీతం =

$$= \frac{4000+3500+4500+6000+5500+6500}{6}$$

$$= \frac{30,000}{6} = \text{రూ. } 5,000.$$

∴ రెండు కంపెనీల్లో కూడా ఉద్యోగుల సగటు జీతాలు సమానం. కానీ 'A' అనే కంపెనీలోని జీతాలు ఎక్కువ పరిధిలో (రూ।। 500 – 20,000) విస్తరించి ఉన్నాయి. కాబట్టి ఉద్యో గార్థి 'B' అనే కంపెనీని ఎంపిక చేసుకోవచ్చు .

కాబట్టి ఒక దత్తాంశం గురించి సరైన నిర్ణయం తీసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశం విస్తరణ కొల తల గురించి

అవగాహన అవసరం. ఎందు కంటే సగటు విపరీత అంశాలతో ప్రభావితం అవుతుంది.

దత్తాంశ విస్తరణను కొలవడానికి ముఖ్యంగా మూడు రకాల కొలతలు అందుబాటులో ఉన్నాయి. అవి :

1. వ్యాప్తి **(Range)**
2. ప్రామాణిక విచలనం (Standard deviation)
3. మాధ్యమ విచలనం (Mean deviation)

1. **వ్యాప్తి:-** దత్తాంశంలోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల మధ్య బేధాన్ని వ్యాప్తి అంటారు. పై ఉదాహరణలో 'A' అనే కంపెనీలోని జీతాలకు సంబంధించిన వ్యాప్తి = 20, 000–500 = రూ,, 19,500.

   'B' అనే కంపెనీలోని జీతాల వ్యాప్తి

   = 6,500 – 3,500 = రూ,, 3,000.

   ∴ 'A' అనే కంపెనీలో జీతాల వ్యాప్తి ఎక్కువ.

   గమనిక: దత్తాంశంలో విస్తరణను సులభంగా, ఉజ్జాయింపుగా కొలవడానికి వ్యాప్తి ఉపయోగపడుతుంది. అయితే విస్తరణను కచ్చితంగా కొలవడానికి వ్యాప్తి సరిపోదు.

2. **మాధ్యమ విచలనం:** దీనినే సగటు విచలనం అని కూడా అంటారు. సగటు లేదా అంకమధ్యమం నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాల సగటునే మాధ్యమ విచలనం అని అంటారు.

   $X_1, X_2, X_3, ----X_n$ అనే "n' రాశుల సగటు లేదా అంకమధ్యం $\bar{x}$ అనుకొంటే సగటు నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాలు =

   $$\left|x_1-\bar{x}\right|,\left|x_2-\bar{x}\right|,\left|x_3-\bar{x}\right|,$$

   $$----\left|x_n-\bar{x}\right|.$$

   ∴ సగటు విచలనం =

   $$\frac{\left|x_1-\bar{x}\right|+\left|x_2-\bar{x}\right|+---+\left|x_n-\bar{x}\right|}{n}$$

   $$=\frac{\Sigma\left|x_i-\bar{x}\right|}{n}$$

   గమనిక: ఒక దత్తాంశం మాధ్యమ విచలనం తక్కువగా ఉంటే ఆ దత్తాంశపు విస్తరణ తక్కువ ఉన్నట్లు.

   ఉదాహరణ:- A, B అనే రెండు యంత్రాలు బిస్కెట్లను ప్యాక్ చేయడానికి వాడుతున్నారు. రెండు యంత్రాలు ప్యాక్ చేసిన 10 శ్యాంపిల్ ప్యాకెట్ల బరువులు కింది విధంగా ఉన్నాయి (గ్రాముల్లో).

   A – 196, 198, 198, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 205

   B – 192, 194, 195, 198, 200, 201, 203, 204, 206, 207.

   మాధ్యమ విచలనాన్ని ఉపయోగించి రెండు యంత్రాల్లో ఏది నమ్మశక్యమైందో కను క్కోండి?

Answer:

'A' అనే యత్రానికి సంబంధించిన 10 శాంపిల్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు =

$$\frac{196+198+---+202+205}{10}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2000}{10} = 200$$ గ్రాములు

మాధ్యమ విచలనం = $\frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$

సగటు $\bar{x}$ నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాలు

$= |196-200|, |198-200|, ---|202 - 200|,$

$|205 - 200|$

$= 4, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 5.$

$\therefore$ మాధ్యమ విచలనం =

$$\frac{4+2+2+1+0+0+1+1+2+5}{10}$$

$$= \frac{18}{10} = 1.8 \rightarrow (1)$$

ఇదే విధంగా 'B' అనే యంత్రపు శాంపిల్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు= $\frac{192+194+,,,,+206+207}{10}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2000}{10} = 200$$ గ్రాములు

సగటు ($\bar{x}$) నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాలు

$= |192 - 200|, |194 - 200|,,, |206 - 200|, |207 - 200|$

$= 8, 6, 5, 2, 0, 1, 3, 4, 6, 7$

$\therefore$ మాధ్యమ విచలనం =

$$\frac{8+6+5+2+0+1+3+4+6+7}{10}$$

$$= \frac{42}{10} = 4.2 \rightarrow (2)$$

1, 2ల నుంచి 'A' అనే కంపెనీ శాంపిల్ ప్యాకెట్ల మాధ్యమ విచలనం తక్కువగా ఉంది. కాబట్టి 'B' కంటే 'A' అనే యంత్రం నమ్మశక్యమైంది అని చెప్పవచ్చు.

గమనిక:- దత్తాంశం విస్తరణను కొలవడానికి వ్యాప్తి కంటే మాధ్యమ విచలనాన్ని కచ్చిత మైన కొలతగా పరిగణించవచ్చు.

3. **ప్రామాణిక విచలనం:** మధ్యమం లేదా సగటు నుంచి ఆయా రాశుల భేదాల వర్గాల మాధ్యమాన్ని విస్తృతి అంటారు. దీనిని "a^2' అనే గ్రీకు అక్షరంలో సూచిస్తాం. విస్తృతి ధనాత్మక వర్గమూలాన్నే

ప్రామాణిక విచలనం అంటాం.

$x_1, x_2, x_3, -x_n$ అనే "n' అనుకొంటే, ఇప్పుడు విస్తృతి ప్రామాణిక విచలనాలను కనుగొందాం.

రాశులు	విచలనాలు	**విచలనాల వర్గాలు**
x_1	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$
x_2	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$
x_3	$x_3 - \bar{x}$	$(x_3 - \bar{x})^2$
,	,	,
,	,	,
,	,	,
x_n	$x_n - \bar{x}$	$(x_n - \bar{x})^2$

ఇప్పుడు విస్తృతి (σ^2)=

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 +$$

$$\frac{....+(x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

విస్తృతి ధనాత్మక వర్గమూలమే ప్రామాణిక విచలనం.

ప్రామాణిక విచలనం $(S.D) = +\sqrt{\sigma^2}$

$$\therefore \sigma = \frac{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ,,, + (x_n - \bar{x})^2}}{n}$$

$$+\frac{\sqrt{\Sigma}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

ఉదాహరణ:

కింది దత్తాంశం విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాలను కనుక్కోండి?

40, 50, 60, 50, 40.

Answer: దత్తాంశంలో ఇచ్చిన 5 రాశుల సగటు $\bar{x} = \frac{40+50+60+50+40}{5}$

$$= \frac{240}{5} = 48$$

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల

వర్గాలు

40 $40-48=-8\ (-8)^2=64$

50 $50-48=2\ (2)^2=4$

60 $60-48=12\ (12)^2=144$

50 $50-48=2\ (2)^2=4$

40 $40-48=-8\ (-8)^2=64$

విస్తృతి $(\sigma^2)=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}$

విస్తృతి $\frac{64+4+144+64+4}{5}$

$=\frac{280}{5}=56$

విస్తృతి $(\sigma^2)=56$

ప్రామాణిక చలనం $(\sigma)+\sqrt{56}$ =7.52

విచలన గుణకం **(coefficient of variation):** దత్తాంశంలోని విస్తరణను కొలవడా నికి కచ్చితమైన కొలతగా విచలన గుణకం ఉపయోగపడుతుంది. విచలనగుణకం =

$$\frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}} \times 100$$

రెండు దత్తాంశాల నిలకడ (consistency) లను పోల్చడానికి విచలన గుణకం ఉపయోగపడుతుంది. విచలన గుణకం తక్కువ ఉన్న దత్తాంశంలో నిలకడ ఎక్కువ ఉన్నట్లు.

ఉదాహరణ:

కింది పట్టికలో A, B అనే ఇద్దరు బ్యాట్స్‌మెన్‌ల పరుగులు అయిదు మ్యాచ్‌లలో ఇచ్చారు.

A – 40, 50, 60, 40, 50

B – 100, 120, 5, 5, 10

నీవు జట్టులోకి ఎవరిని ఎంపిక చేస్తావు? ఎందుకు?

(Civil Services Mains, 1991)

Answer: 'A' బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు పరుగులు

$\frac{40+50+60+40+50}{5}$

$=\frac{240}{5}=48$

అలాగే 'B' సగటు పరుగులు $=\frac{100+120+5+5+10}{5}$ $=\frac{240}{5}=48$

ఇద్దరు ఆటగాళ్ల సగటు పరుగులు సమానంగా ఉన్నాయి కాబట్టి ఇద్దరిలో ఎవరు నిలకడైన ఆటగాడో చూడాలి.

A బ్యాట్స్‌మెన్ విచలనగుణకం:-

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
40	$40-48=-8$	$(-8)^2=64$
50	$50-48=2$	$(2)^2=4$
60	$60-48=12$	$(12)^2=144$
40	$40-48=-8$	$(-8)^2=64$
50	$50-48=2$	$(2)^2=4$

A ప్రామాణిక విచలనం $= \frac{\pm\sqrt{64+4+144+64+4}}{5}$

$= \frac{\pm\sqrt{280}}{5} = \pm\sqrt{56}$ $=7.52$

A విచలన గుణకం $= \frac{7.52}{48} \times 100 = 15.625$

B - బ్యాట్స్‌మెన్ విచలన గుణకం:

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
100	$100-48=52$	$(52)^2=2704$
120	$120-48=72$	$(72)^2=5184$
5	$5-48=-43$	$(-43)^2=1849$
5	$5-48=-43$	$(-43)^2=1849$
10	$10-48=-38$	$(-38)^2=1444$

B ప్రామాణిక విచలనం

$= \frac{\pm\sqrt{2704+5184+1849+1849+1444}}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{13030}{5}} = \pm\sqrt{2606} = 51.05$

B విచలన గుణకం =

$$\frac{51.05}{48} \times 100$$

= 106.35

1, 2ల నుంచి 'B' కంటే A విచలన గుణకం తక్కువ. అంటే B కంటే 'A' నిలకడైన ఆటగాడు. కాబట్టి జట్టులోకి 'A' అనే ఆటగాణ్ణి ఎంపిక చేస్తాను.