సగటు-గుణమధ్యమం

గ్రూప్-I, మెయిన్స్ పేపర్-5, సివిల్ సర్వీసెస్ మెయిన్స్ తదితర పోటీ పరీక్షలకు గుణమధ్యమం అనే అంశం చాలా ప్రధానమైంది. గుణమధ్యమం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల్లో ఉపయోగించే గణిత సగటు.

నిర్వచనం: దత్తాంశంలోని 'n' రాశుల లబ్ధానికి చెందిన 'n'వ మూలకాన్నే గుణమధ్యమం అంటారు. x_1, x_2, x_3, ..., x_nల గుణమధ్యమం

$$= (x_1.x_2.x_3.....x_n)^{\frac{1}{n}}$$ (లేదా)

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\text{Log}x_1 + \text{Log}x_2 + \text{Log}x_3 + ... + \text{Log}x_n}{n}\right]$$

$$= \text{Anti log}\left[\frac{\Sigma \log x_i}{n}\right]$$

నోట్: గుణమధ్యమాన్ని గణించాలంటే కచ్చితంగా సైంటిఫిక్ కాలిక్యులేటర్ అవసరం

ఉదా: 2, 4, 8ల గుణమధ్యమం ఎంత?

సమాధానం: గుణమధ్యమం = $(2\times4\times8)^{1/3}$

$= (64)^{1/3} = 4$

ఉదా: 18, 8ల గుణమధ్యమం ఎంత?

సమాధానం: గుణమధ్యమం = $(18\times8)^{1/2}$

$= \sqrt{144} = 12$

విచ్ఛిన్న శ్రేణుల గుణమధ్యమం:

రాశులు(x_i)	**పౌనఃపున్యాలు(f_i)**
x_i	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
x_n	f_n

మొత్తం Σf_i

పై విచ్ఛిన్న శ్రేణి గుణమధ్యమం =

$= \left(x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.x_3^{f^3}.....x_n^{f^n}\right)^{\frac{1}{\Sigma f_i}}$

$= \text{Antil og}\left[\frac{\Sigma f_i \text{Log} x_i}{\Sigma f_i}\right]$ (లేదా)

$= \text{AntiL og}\left[\frac{f_1\text{Log}x_1 + f_2\text{Log}x_2 + f_3\text{Log}x_3 + ... + f_n\text{Log}x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}\right]$

భారిత గుణమధ్యమం:

ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులన్నీ సమప్రాధాన్యం లేకుండా, వివిధ భారాలు (Weights) కలిగి ఉంటే అప్పుడు భారిత గుణమధ్యమాన్ని (Weighted Geometric Mean) వాడాలి.

రాశులు(x_i)	**భారాలు(W_i)**
x_1	W_1
x_2	W_2
x_3	W_3
x_n	W_n
మొత్తం	ΣW_i

నోట్: అన్ని రాశుల భారాలు సమానమైతే భారిత గుణమధ్యమం, సాధారణ గుణమధ్యమం సమానమవుతాయి.

ఈ దత్తాంశం గుణమధ్యమం

$= \left(x_1^{W_1}.x_2^{W_2}.x_3^{W_3}.....x_n^{W_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma w_i}}$

$= \text{Antil og}\left[\frac{\Sigma W_i \text{Log} x_i}{\Sigma W_i}\right]$

గుణమధ్యమం ధర్మాలు:

1. దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులపైనా ఆధారపడి ఉంటుంది.
2. ఏకవిలువకు కట్టుబడి ఉంటుంది.

3. బీజీయ వ్యవస్థకు అనుగుణంగా ఉంటుంది.

ఉదా: ఉమ్మడి గుణమధ్యమం.

మొదటి సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య n_1, వాటి గుణమధ్యమం x_1, రెండో సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య n_2, వాటి గుణమధ్యమం x_2 ఐతే ఆ రెండు సమూహాల ఉమ్మడి గుణమధ్యమం

$$= \text{Anti}\log\left[\frac{n_1.\text{Log}x_1 + n_2.\text{Log}x_2}{n_1 + n_2}\right]$$

సమూహాల సంఖ్య రెండు కంటే ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు కూడా పై సూత్రాన్నే విస్తరించి రాసుకోవచ్చు.

4. అంకమధ్యమం ఎక్కువ విలువలున్న రాశులతో ఎక్కువ ప్రభావితమవుతుంది. కానీ గుణ మధ్యమం తక్కువ విలువలున్న రాశుల తో ఎక్కువ ప్రభావితమవుతుంది. అందుకే చిన్న రాశులకు అధిక ప్రాధాన్యం, పెద్ద రాశుల కు తక్కువ ప్రాధాన్యం ఇవ్వాల్సి వచ్చినప్పుడు సాధారణంగా గుణ మధ్యమాన్ని వాడుతారు. ఐతే గుణ మధ్యమంలోని కింది లోపాలు లేదా పరిమితులు కూడా దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

   1) గుణ మధ్యమాన్ని గణన చేయడం, అవగాహన చేసుకోవడం కష్టం.

   2) దత్తాంశంలో కొన్ని రాశులు సున్నా లేదా రుణాత్మకమైతే ఆ దత్తాంశానికి సాధారణంగా గుణమధ్యమాన్ని నిర్వచించలేం.

గుణమధ్యమం–ఉపయోగాలు:

1. ఒక రాశిలో ఆయా సంవత్సరాల్లో వచ్చిన మార్పు శాతాలను ఇచ్చినప్పుడు వార్షిక సగటు మార్పు శాతాన్ని లేదా వార్షిక సగటు మార్పు రేటును కనుక్కోవడానికి గుణ మధ్య మాన్ని వాడుతారు. మార్పు శాతం అంటే పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల శాతం కావొచ్చు.
2. వివిధ రాశుల్లో వచ్చిన మార్పు శాతాలను ఇచ్చినప్పుడు, అన్ని రాశులకు కలిపి సగటు మార్పు శాతాన్ని కనుక్కోవడానికి భారిత గుణ మధ్యమాన్ని వాడుతారు.
3. చక్రవడ్డీ రేటు (లేదా వార్షిక సగటు వడ్డీరేటు) కనుక్కోవడానికి గుణ మధ్యమం వాడుతారు.
4. వివిధ అంశాలకు సంబంధించిన సూచీ సంఖ్యలు, భారాలు ఇచ్చినప్పుడు అన్ని అంశాలకు కలిపి సూచీ సంఖ్య (ఇండెక్స్ నంబర్)ను నిర్మించడానికి భారిత గుణ మధ్యమాన్ని వాడుతారు.
5. సగటు నిష్పత్తి కనుక్కోవడానికి కూడా గుణ మధ్యమాన్నే వాడుతారు.

సగటు మార్పు శాతం – సూత్రాలు

i) ఒక రాశి 'n' వరుస సంవత్సరాల్లో వరుసగా $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots R_n\%$ చొప్పున పెరిగితే ఈ 'n' సంవత్సరాల్లో ఆ రాశి సగటు పెరుగుదల రేటు= $[(100+R_1)\ (100+R_2)\ (100+R_3)\ldots (100+R_n)]^{1/n} - 100.$

ii) ఒక రాశి 'n' వరుస సంవత్సరాల్లో వరుసగా $R_1, R_2, R_3....R_n\%$ చొప్పున తగ్గితే, ఈ 'n' సంవత్సరాల్లో ఆ రాశి సగటు తగ్గుదల శాతం = $100–[(100–R_1)\ (100–R_2)\ (100–R_3)...\ (100–R_n)]^{1/n}$

iii) ఒక రాశి మొదటి సంవత్సరం $R_1\%$ పెరిగి, రెండో సంవత్సరం $R_2\%$ తగ్గి, మూడో సంవత్సరం $R_3\%$ పెరిగితే, ఈ మూడేళ్లలో నమోదైన సగటు మార్పు శాతం=

$[(100+R_1)(100–R_2)(100+R_3)]^{1/3}– 100$

(నోట్: దీని విలువ '+' ve ఐతే పెరుగుదల శాతం నమోదైనట్లు, '–' ve ఐతే తగ్గుదల శాతం నమోదైనట్లు అర్థం)

మరో ముఖ్య గమనిక: ఇచ్చిన దత్తాంశానికి గుణమధ్యమాన్ని మూడు విధాలుగా కనుక్కోవచ్చు. అవి...

ఎ) సంవర్గమానాలు (Logarithms) ఉపయోగించి

బి) సంవర్గమానాలు ఉపయోగించకుండా ప్రాథమిక సూత్రం ఉపయోగించి

సి) చక్రవడ్డీ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

పై మూడు విధాల్లో దేన్ని తీసుకున్నప్పటికీ సరైన సమాధానమే వస్తుంది.

ఉదా: ఒక దేశ ఆర్థికవ్యవస్థ వార్షిక వృద్ధి రేట్లు ఐదేళ్లలో వరుసగా 1.5%, 2.7%, 3.0%, 4.5%, 6.2%గా నమోదయ్యాయి. ఐతే ఈ ఐదేళ్లలో ఆ దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ సగటు వార్షిక వృద్ధి రేటు ఎంత?

సమాధానం: సగటు వార్షిక వృద్ధి రేటు గణించాలంటే గుణమధ్యమం సరైన గణాంకపు కొలత. ప్రతి సంతవ్సరం ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువను 100 యూనిట్లు అనుకొని ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పట్టికలో తీసుకుంటే...

సం.	వార్షిక వృద్ధి రేటు	సం. చివర ఆర్థిక వ్యవస్థ
1.	1.5	100+1.5 = 101.5
2.	2.7	100+2.7=102.7
3	3.0	100+3.0=103.0
4	4.5	100+4.5=104.5
5	6.2	100+6.2=106.2

గుణమధ్యమం = (రాశుల లబ్దం)$^{1/\text{రాశుల సంఖ్య}}$ అనే ప్రాథమిక సూత్రం ప్రకారం ఆయా సంవత్సరాల చివర ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువల గుణమధ్యమం= $(101.5\times102.7\times 103\times104.5\times106.2)^{1/5} = 103.5673$

అంటే ఆ దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ సగటున ప్రతి ఏటా 100 యూనిట్ల నుంచి 103.5673 యూనిట్లకు

పెరిగిందని అర్థం.

∴ వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 103.56737–100 = 3.5673%

ఉదా: ఒక యంత్రం విలువ మొదటి సంవత్సరం 40%, రెండో ఏడాది 25%, తర్వాత మూడేళ్లలో 10% మేర తగితే ఈ ఐదేళ్లలో యంత్రం విలువలోని సరాసరి తగ్గుదల శాతం ఎంత?(ఇక్కడ ప్రతి శాతం తగ్గిన విలువపై గణించారు)

(ఎపీపీఎస్సీ, గ్రూప్–1, మెయిన్స్–2008)

సమాధానం: ఇప్పుడు ఈ సమస్యను లాగరిథమ్స్ ఉపయోగించి ఎలా సాధించవచ్చో చూద్దాం.

ప్రతి సంవత్సరం ప్రారంభంలో యంత్రం విలువను 100 యూనిట్లు అనుకొని ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పట్టికలో రాస్తే

సం.	తగ్గుదల%	సం॥ చివర యంత్రం విలువ (x_i)	$\text{Log } x_i$
1	40	100-40=60	1.77815
2	25	100-25=75	1.87506
3.	10	100-10=90	1.95424
4.	10	100-10=90	1.95424
5.	10	100-10=90	1.95424
			$\Sigma \text{Log } x_i = 9.51594$

పై దత్తాంశం గుణమధ్యమం

$$= \text{Anti log}\left[\frac{\Sigma \text{Log } x_i}{n}\right]$$

'n' అంటే సంవత్సరాల సంఖ్య = 5

∴ గుణమధ్యమం=Antilog [9.51594/5]

= Antilog [1.90388] = 80.0180.

అంటే యంత్రం విలువ సగటున ప్రతి ఏటా 100 యూనిట్ల నుంచి 80.0180 యూనిట్లకు తగ్గిందని అర్థం.

∴ యంత్రం విలువలోని సగటు తగ్గుదల శాతం = 100 – 80.0180 = 19.98

ఉదా: ఒక దేశ జనాభా 1981లో 70 కోట్లు, 1991లో 90 కోట్లు. ఐతే ఈ పదేళ్లలో దేశ జనాభాలో వార్షిక సగటు పెరుగుదల శాతం?

సమాధానం: ఈ విధంగా దత్తాంశంలో ఒక రాశి తొలి విలువ, తుది విలువ, కాలవ్యవధులు ఇచ్చినప్పుడు చక్రవడ్డీ సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

ఒక రాశి విలువ 'P' ఐతే, ఆ రాశి ప్రతి ఏటా సగటున R% చొప్పున పెరిగితే 'n' సంవత్సరాల తర్వాత

ఆ రాశి విలువ =

$$P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}$$

ఇప్పుడు దత్తాంశం ప్రకారం,

$$90 = 70\left(1+\frac{R}{100}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{R}{100}\right)^{10} = \frac{90}{70} = 1.28571$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R}{100} = (1.28571) = 1.02545$$

$$\Rightarrow \frac{R}{100} = 0.02545$$

$$R = 2.545$$

∴ ఈ పదేళ్లలో దేశ జనాభాలోని వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 2.545%