సగటు మార్పు శాతం

గత పాఠ్యాంశంలో మార్పు శాతానికి సంబంధించిన మౌలిక అంశాలు, సూత్రాలు, ఉదాహరణలు చర్చించాం. ఇందులో సగటు మార్పు శాతం లేదా సగటు మార్పు రేటు గురించి చర్చిద్దాం. జనాభాలోని సగటు పెరుగుదల రేటు, యంత్రం విలువ సగటు తరుగుదల రేటు, ఒక ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ సగటు వృద్ధిరేటు.. వంటి గణాంకాలను కనుగొనడం అనేక పర్యాయాలు మనకు అవసరం అవుతుంటాయి. ఈ అంశంపై గత 2008లో జరిగిన గ్రూప్-I మెయిన్స్ పరీక్షలో పది మార్కుల ప్రశ్న వచ్చింది. కాబట్టి ఇది గ్రూప్-I పరీక్షలు రాయబోయే అభ్యర్థులకు ఎంతో ప్రధానం.

గుణ మధ్యమం (Geometric Mean):

గుణ మధ్యమానికి ప్రధానంగా కింది ఉపయోగా లను చూస్తాం.

- ఆయా సంవత్సరాల్లో ఒక రాశిలో నమోదైన మార్పు శాతాల (మార్పు రేట్ల) సగటును కనుగొనడం.
- వివిధ నిష్పత్తుల సగటు నిష్పత్తిని కనుగొనడం.
- గుణ మధ్యమాన్ని ఉపయోగించి సగటు మార్పు శాతాన్ని మూడు విధాలుగా కనుక్కోవచ్చు. ఈ మూడు విధాల్లో ఏ విధంగా చేసినా ఒకే సమాధానం వస్తుంది.

మొదటి పద్ధతి:

ఒక రాశి తొలి విలువ 'P_o' అనుకొంటే...

'n' సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ 'P_n' అనుకుంటే...

అప్పుడు ఆ రాశిలో నమోదైన వార్షిక సగటు మార్పు శాతం 'R' అనుకుంటే.. అప్పుడు

$$P_n = P_o\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రం ద్వారా ఒక సమీకరణాన్ని ఏర్పరిచి, దాన్ని సాధించడం ద్వారా 'R' విలువను కనుక్కోవచ్చు.

గమనిక: మార్పు అంటే పెరుగుదల లేదా తరుగు దలల్లో ఏదైనా కావచ్చు. రాశిలో పెరుగుదల నమోదైతే

$$P_n = P_o\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రం ఉపయోగించవచ్చు.

ఒకవేళ రాశిలో తరుగుదల నమోదైతే

$$P_n = P_o\left[1-\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

రెండో పద్ధతి:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ అనే 'n' రాశుల గుణ మధ్యమం = $[x_1.x_2.x_3.\ldots\ldots x_n]^{\frac{1}{n}}$

అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సగటు మార్పు శాతాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

మూడో పద్ధతి:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ అనే 'n' రాశుల గుణ మధ్యమం =

$\text{Anti log}\left[\frac{\sum \log x}{n}\right]$ అవుతుంది.

ఇక్కడ...

$\Sigma \text{Log}x = \text{Log}x_1 + \text{Log}x_2 + \ldots\ldots\ldots + \text{Log}x_n.$

అంటే $\Sigma \text{Log}x$ అనేది ఆయా అంశాల సంవర్గ మానాల సంకలనం. ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కూడా సగటు మార్పు శాతాన్ని కనుగొనవచ్చు.

ముఖ్య గమనిక: పై మూడు పద్ధతుల్లో ఏ పద్ధతిని ఉపయోగిం చాలన్నా కూడా "Scientific calculator"ని ఉపయోగించడం తప్పనిసరి. కాబట్టి అభ్యర్థులు calculatorను నేర్పుగా ఉపయోగిం చడం నేర్చుకోవాలి.

ఉదాహరణ: 1981 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒక రాష్ట్ర జనాభా 70 మిలియన్లు. 1991 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఆ రాష్ట్ర జనాభా 90 మిలియన్లకు పెరిగింది. అయితే ఈ పదేళ్ల కాలంలో ఆ రాష్ట్ర జనాభాలోని వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు ఎంత?

సమాధానం: ఇక్కడ ఒక రాష్ట్ర జనాభా తొలి విలువ, పదేళ్ల అనంతరం దాని విలువ ఇచ్చారు. కాబట్టి మనం మొదటి పద్ధతిని ఆశ్రయించవచ్చు.

దత్తాంశం నుంచి...

$P_o = 70$ మిలియన్లు

$P_n = 90$ మిలియన్లు

$n = 10$ సంవత్సరాలు

$$P_n = P_o\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

ఇందులో 'R' జనాభాలోని వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటును సూచిస్తుంది.

$$\Rightarrow 90 = 70\left[1+\frac{R}{100}\right]^{10}$$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{R}{100}\right]^{10} = \frac{90}{70} = 1.285$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R}{100} = (1.285)^{\frac{1}{10}} = (1.285)^{0.1}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R}{100} = 1.025$$

$$\Rightarrow \frac{R}{100} = 1.025 - 1 = 0.025$$

$$\Rightarrow R = 0.025\times 100 = 2.5$$

$\therefore$ రాష్ట్ర జనాభాలో వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 2.5%

ఉదాహరణ: ఒక భవనం విలువ క్రమంగా తగ్గుతూ ఉంది. ఈ తగ్గుదల మొదటి ఏడాది 5 శాతం, రెండో ఏడాది 10 శాతం, మూడో ఏడాది 15 శాతం, తర్వాత రెండేళ్లలో 20 శాతం చొప్పున ఉంది. అయితే ఈ ఐదేళ్ల కాలంలో భవనం వార్షిక సగటు తగ్గుదల రేటును కనుగొనండి.

సమాధానం: ఈ సమస్యను మూడు పద్ధతుల్లో ఏ పద్ధతి ద్వారా అయినా సాధించవచ్చు.

మొదటి పద్ధతి:

సాధారణత కోల్పోకుండా భవనం విలువ ప్రారంభంలో 100 యూనిట్లు అనుకొంటే.....

ఇప్పుడు దత్తాంశం ప్రకారం 5 ఏళ్ల తర్వాత ఆ భవనం విలువ

$$=100\times\left(\frac{100-5}{100}\right)\times\frac{(100-10)}{100}$$

$$\times\frac{(100-15)}{100}\times\frac{(100-20)}{100}\times\frac{(100-20)}{100}$$

$$=95\times\frac{90}{100}\times\frac{85}{100}\times\frac{80}{100}\times\frac{80}{100}$$

= 46.512 యూనిట్లు

ఇప్పుడు భవనం తొలి విలువ $P_o = 100$,

5 ఏళ్ల తర్వాత దాని విలువ = 46.512

$$\therefore\ P_n = P_o\left[1-\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రం ప్రకారం..

$$46.512 = 100\left[1-\frac{R}{100}\right]^5$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{R}{100}\right]^5 = \frac{46.512}{100} = 0.46512$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{R}{100}\right] = (0.46512)^{1/5} = 0.8580$$

$$\Rightarrow R = 14.2$$

$\therefore$ భవనం వార్షిక సగటు తగ్గుదల రేటు = 14.2%

రెండో పద్ధతి:

ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో భవనం విలువ '100' యూనిట్లు అనుకొందాం. ఇప్పుడు భవనం విలువలు, తగ్గుదలను ఆయా సంవత్సరాల్లో పట్టికలో రాస్తే..

సం॥	ప్రారంభంలో భవనం విలువ	చివర్లో భవనం విలువ	భవనం విలువలోని తగ్గుదల శాతం
1	100	100–5 = 95	5
2	100	100–10 = 90	10
3	100	100–15 = 85	15
4	100	100–20 = 80	20
5	100	100–20 = 80	20

ప్రతి సంవత్సరం చివర్లో భవనం విలువలు– 95, 90, 85, 80, 80ల గుణ మధ్యమం

$$= (95\times90\times85\times80\times80)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (4651200000)^{1/5} = 85.80$$

(ఈ అయిదు విలువల గుణ మధ్యమాన్ని కనుగొనడానికి మూడో పద్ధతిలోని సంవర్గమా నాలకు (Logarithm) సంబంధించిన సూత్రాన్ని కూడా వాడొచ్చు)

అంటే సగటున ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో భవనం విలువ 100 యూనిట్లు అయితే సంవత్స రం చివర్లో దాని విలువ 85.80 యూనిట్లు అని తెలుస్తోంది.

$\therefore$ భవనం విలువలోని వార్షిక సగటు తగ్గుదల రేటు = 100 – 85.80 = 14.20%

ఉదాహరణ: ఒక యంత్రం విలువ మొదటి ఏడాది 40 శాతం, రెండో ఏడాది 25%, తర్వాత మూడేళ్లలో 10 శాతం మేరకు తగ్గితే ఐదేళ్లలో సరాసరి తగ్గుదల శాతం ఎంత? ఇక్కడ ప్రతి శాతం తగ్గుదల విలువ పైన గణించారు.

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్–I, 2008)

సమాధానం: ఈ సమస్యను ఇది వరకు చర్చించిన మూడు పద్ధతుల్లో దేనినైనా ఉపయోగించి చెయ్యొచ్చు. రెండో పద్ధతి ప్రకారం చేసి చూద్దాం.

ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో యంత్రం విలువ 100 యూనిట్లు అనుకొంటే.....

ఇప్పుడు ఆయా సంవత్సరాల్లో యంత్రం విలువలను, వాటి విలువలోని తగ్గుదలను ఒక పట్టికలో రాస్తే..

సం॥	ప్రారంభంలో యంత్రం విలువ	తగ్గుదల శాతం	సం॥చివర్లో యంత్రం విలువ
1	100	40	100–40 = 60
2	100	25	100–25 = 75
3	100	10	100–10 = 90
4	100	10	100–10 = 90
5	100	10	100–10 = 90

ప్రతి సంవత్సరం చివర్లో యంత్రం విలువలు అయితే 60, 75, 90, 90, 90ల గుణ మధ్యమం

$= (60 \times 75 \times 90 \times 90 \times 90)^{\frac{1}{5}} = 80.018$

అంటే సగటున ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో యంత్రం విలువ 100 యూనిట్లు. అయితే సంవత్స రం చివర్లో దాని విలువ 80.018 యూనిట్లు అని తెలుస్తోంది.

∴ యంత్రం విలువలో వార్షిక సరాసరి తగ్గుదల రేటు = $100 - 80.018 = 19.982$

∴ సమాధానం : 19.982%