సాంఖ్యక శాస్త్రం-8

ప్రామాణిక విచలనం
(Standard Deviation)

విస్తరణ కొలతల్లో ప్రధానమైంది ప్రామాణిక విచలనం. దీన్నే క్రమ విచలనం లేదా వర్గ విచలనం అని కూడా అంటారు.

విస్తృతి: అంకమధ్యమం నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాల వర్గాల అంక మధ్యమాన్నే విస్తృతి అంటారు. విస్తృతిని 'σ^2'తో సూచిస్తారు.

ప్రామాణిక విచలనం: విస్తృతి ధనాత్మక వర్గమూలాన్నే ప్రామాణిక విచలనం అంటారు. దీన్ని 'σ' అనే గ్రీక్ అక్షరంతో సూచిస్తారు.

పై నిర్వచనం ప్రకారం విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాల సూత్రాలు రాద్దాం. $x_1, x_2, x_3,....x_n$ అనే 'n' రాశులుంటే.. వాటి అంకమధ్యమం = $\bar{x}$ అనుకుంటే..

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
x_1	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$
x_2	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$
x_3	$x_3 - \bar{x}$	$(x_3 - \bar{x})^2$
;	;	;
;	;	;
x_n	$x_n - \bar{x}$	$(x_n - \bar{x})^2$

విచలనాల వర్గాల మొత్తం = $\sum(x_n - \bar{x})^2$

విస్తృతి = విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమం = $\frac{\sum(x_n - \bar{x})^2}{n}$;

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma) = {}^{+}\sqrt{\frac{\sum(x_n - \bar{x})^2}{n}}$

నోట్: ప్రామాణిక విచలనం విలువ ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకంగానే ఉంటుంది.

ప్రామాణిక విచలనానికి మరో సూత్రం:

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$

ఈ సూత్రం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల్లో చాలా అవసరం. ఉదాహరణకు ఇచ్చిన రాశుల అంకమధ్యమం సంక్లిష్టంగా ఉన్నప్పుడు, ఇచ్చిన రాశుల్లో కొన్ని చరరాశులు ఉన్నప్పుడు, ప్రామాణిక విచలనంలోని పొర పాట్లను సవరించడానికి రెండో సూత్రాన్ని వాడతాం.

ఉదా: ఒక బ్యాట్స్‌మ్యాన్ తన చివరి 5 మ్యాచ్‌ల్లో చేసిన పరుగులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి. 40, 50, 60, 40, 50. ఐతే అతని పరుగుల ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కోండి?

సమాధానం: అంకమధ్యమం $(\bar{x})$=

రాశుల మొత్తం/రాశుల సంఖ్య

కాబట్టి అతని పరుగుల అంకమధ్యమం $(\bar{x})$

$= \frac{40+50+60+40+50}{5} = \frac{240}{5} = 48$

రాశులు (x_n)	విచలనాలు $(x_n - \bar{x})$	విచలనాల వర్గాలు $(x_n - \bar{x})^2$
40	40-48 = –8	64
50	50-48 = 2	4
60	60-48 = 12	144
40	40-48 = –8	64
50	50-48 = 2	4

$\sum(x_n - \bar{x})^2 = 280$

పై దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం

$= \sqrt{\frac{\sum(x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad = \sqrt{\frac{280}{5}} = \sqrt{56} = 7.48$

∴ బ్యాట్స్‌మ్యాన్ పరుగుల ప్రామాణిక విచలనం

= 7.48 పరుగులు

ఉదా: మొదట 'n' సహజ సంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కోండి?

సమాధానం: ఈ సమస్యను సాధించాలంటే ప్రామాణిక విలచనం, రెండో సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం =

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల అంకమధ్యమం $(\bar{x})$

$$= \frac{\Sigma n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n} = \frac{n+1}{2}$$

రాశులు(x_n)	రాశుల వర్గాలు $(x^2{}_n)$
1	1^2
2	2^2
3	3^2
;	;
;	;
n	n^2

$$\sum x_n^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$$

$$= \Sigma n^2$$

కానీ మొదట 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \sum x_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

పై దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం

$$= \sqrt{\frac{\sum x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{2}\left[\frac{4n+2-3n-3}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n-1}{6}\right)} \quad = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

$\therefore$ మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనం = $\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

విచలన గుణకం: విచలన గుణకం =

ప్రామాణిక విచలనం/అంకమధ్యమం $\times 100$

$= \frac{100\sigma}{\bar{x}}$

విచలన గుణకానికి ప్రమాణాలు ఉండవు.

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ దత్తాంశాల్లో నిలకడ లేదా స్థిరత్వాన్ని కొలవడానికి విచలన గుణకం తోడ్పడుతుంది. విచలన గుణకం తక్కువగా ఉన్న దత్తాంశంలో రాశుల విస్తరణ తక్కువగా ఉంటుంది. అంటే ఆ దత్తాంశంలో నిలకడ/స్థిరత్వం ఎక్కువ.

ఎంపిక: ఆటగాళ్లు, విద్యార్థులు, ఉత్పత్తులు, కంపెనీలు మొదలైన వాటిని ఎంపిక చేసుకోవాలంటే రెండు అంశాలు దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

i) **ప్రతిభ/నాణ్యత:** దీన్ని అంకమధ్యమం ద్వారా కొలుస్తాం.

ii) **నిలకడ/స్థిరత్వం:** దీన్ని విచలన గుణకాన్ని ఉపయోగించి కొలవాలి.

ఉదా: ముగ్గురు ఆటగాళ్లు తమ చివరి 10 మ్యాచ్‌ల్లో చేసిన పరుగుల సగటు వరుసగా 50, 48, 12. వారి పరుగుల ప్రామాణిక విచలనాలు వరుసగా 15, 12, 2 ఐతే ముగ్గురిలో జట్టులోకి ఒకరినే ఏ విధంగా ఎంపిక చెయొచ్చు.

సమాధానం: మొదటి ఆటగాడి సగటు పరుగులు (50) అందరి కంటే గరిష్టం. అంటే ముగ్గురిలో అతని ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉంది ——— (1)

$$\text{విచలన గుణకం} = \frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}} \times 100$$

ఈ సూత్రం ప్రకారం, ముగ్గురు ఆటగాళ్ల విచలన గుణకాలు వరుసగా =

$$\frac{15}{50}\times 100,\ \frac{12}{48}\times 100,\ \frac{2}{12}\times 100$$

= 30, 25, 16.666

అంటే విచలన గుణకం కనిష్టంగా (16.66) ఉన్న మూడో ఆటగాడి ప్రదర్శనలో నిలకడ ఎక్కువగా ఉంది —— (2)

∴ (1), (2)ల నుంచి ఎక్కువ పరుగులు చేసే వ్యక్తి కావాలంటే మొదటి ఆటగాడిని; నిలకడగా ఆడే వ్యక్తి కావాలంటే మూడో ఆటగాడిని ఎంపిక చేసుకోవాలి.

ఉదా: ఇద్దరు బ్యాట్స్‌మెన్లు (A, B) తమ చివరి 5 మ్యాచ్‌ల్లో చేసిన పరుగులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి. ఐతే జట్టులోకి ఎవరిని ఎంపిక చేయాలి?

A	40, 50, 60, 40, 50
B	100, 120, 5, 5, 10

సమాధానం: సగటు పరుగులు =

మొత్తం పరుగులు/మ్యాచ్‌ల సంఖ్య

చివరి 5 మ్యాచ్‌ల్లో 'A' సగటు పరుగులు

$$\frac{40+50+60+40+50}{5}=\frac{240}{5}=48,$$

'B' సగటు పరుగులు =

$$\frac{100+120+5+5+10}{5}=\frac{240}{5}=48$$

A, Bల ఇద్దరి సగటు పరుగులు సమానం కాబట్టి ఆ ఇద్దరిలో నిలకడగా ఆడే ఆటగాడిని ఎంపిక చేయాలి. నిలకడను కొలవడానికి విచలన గుణకం కచ్చితమైంది. మొదటి ఉదాహరణలో మనం 'A' ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొన్నాం.

'A' ప్రామాణిక విచలనం = 7.48

విచలన గుణకం = ప్రామాణిక విచలనం/ అంకమధ్యమం $\times 100$

$$=\frac{7.48}{48}\times 100=15.58 \text{ —— (1)}$$

'B' ప్రామాణిక విచలనం

రాశులు (x_n)	విచలనాలు $(x_n-\bar{x})$	విచలనాల వర్గాలు $(x_n-\bar{x})^2$
100	100-48 = +52	2704

120	120-48 = +72	5184
5	5-48 = –43	1849
5	5-48 = –43	1849
10	10-48 = –38	1444

$$\sum\left(x_n-\bar{x}\right)^2=13030$$

పై దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum\left(x_n-\bar{x}\right)^2}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{13030}{5}}=\sqrt{2606}=51.04$$

$\Rightarrow$ 'B' విచలన గుణకం = $\frac{51.04}{48}\times100$

$= 106.33$ ____ (2)

$\therefore$ (1), (2)ల నుంచి తక్కువ విచలన గుణకం కలిగినటువంటి 'A' నిలకడైన ఆటగాడు అని చెప్పొచ్చు. కాబట్టి జట్టులోకి 'A'ను ఎంపిక చేయాలి.

ఉదా: A, B అనే ఇద్దరు విద్యార్థులకు '6' పరీక్షల్లో వచ్చిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

A	73,	19,	63,	58,	43,	39
B	66,	42,	68,	48,	61,	69

ఐతే i) ఎవరి ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉంది.

ii) ఎవరు నిలకడైన ప్రతిభ కనబరిచారు.

సమాధానం: i) సగటు మార్కులు =

మొత్తం మార్కులు/పరీక్షల సంఖ్య

'A' సగటు మార్కులు $(\bar{x})$

$$=\frac{73+19+63+58+43+39}{6}=\frac{295}{6}=49.166$$

'B' సగటు మార్కులు $(\bar{y})$

$$=\frac{66+42+68+48+61+69}{6}=\frac{354}{6}=59$$

'A' కంటే 'B' సగటు మార్కులు అధికం కాబట్టి 'B' ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉందని చెప్పొచ్చు.

ii) ప్రతిభలోని నిలకడను కొలవాలంటే విచలన గుణకాలు కనుక్కోవాలి.

'A' ప్రామాణిక విచలనం

రాశులు (x_n)	రాశుల వర్గాలు (x^2_n)
73	5329
19	361
63	3969
58	3364
43	1849
39	1521

$$\sum x_n^2 = 16,393$$

A - ప్రామాణిక విచలనం = $\sqrt{\frac{\sum x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$

$= \sqrt{\frac{16393}{6} - (49.166)^2}$

$= \sqrt{2732.166 - 2417.295}$

$= \sqrt{314.870} = 17.74$

A - విచలన గుణకం =

$\frac{17.74}{49.166} \times 100 = 36.08$ —— (1)

ఇదే విధంగా 'B' విచలన గుణకాన్ని కనుక్కోవాలి.

రాశులు (y_n)	రాశుల వర్గాలు (y^2_n)
66	4356
42	1764
68	4624

48	2304
61	3721
69	4761

$$\sum y_n^2 = 21,530$$

ఈ దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum y_n^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{21530}{6} - (59)^2}$$

$$= \sqrt{3588.33 - 3481} = \sqrt{107.333} = 10.36$$

B - విచలన గుణకం =

$$\frac{10.36}{59} \times 100 = 17.56 \quad \text{——} (2)$$

∴ (1), (2)ల నుంచి 'B' విచలన గుణకం తక్కువ కాబట్టి 'A' కంటే 'B' నిలకడైన ప్రతిభ కనబరుస్తున్నాడని చెప్పొచ్చు.