సాంఖ్యక శాస్త్రం-5

ప్రామాణిక విచలనం, విచలన గుణకం, నిలకడ మొదలైన వాటి గురించి గతంలో చర్చించాం. వీటికి సంబంధించిన మరికొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

1. 'X', 'Y' అనే బంతిని కొట్టే ఆటగాళ్ల పరుగులు ఆరు క్రికెట్ ఆటల్లో కింది విధంగా ఉన్నాయి.

X : 75, 21, 65, 60, 45, 41

Y : 68, 44, 75, 68, 63, 71

ఎవరి సామర్థ్యం ఎక్కువగా ఉంది? ఎందుకు?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1, మోడల్ పేపర్-2007)

సమాధానం:

$$\text{సగటు} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి, 6 మ్యాచ్‌ల్లో 'X' అనే బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు పరుగులు

$$\bar{x} = \frac{75+21+65+60+45+41}{6}$$

$$= \frac{307}{6} = 51.16$$

అదేవిధంగా 'Y' బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు పరుగులు

$$\bar{y} = \frac{68+44+75+68+63+71}{6}$$

$$= \frac{389}{6} = 64.83$$

' X' కంటే 'Y' సగటు ఎక్కువ కాబట్టి 'Y' అనే బ్యాట్స్‌మెన్ సామర్థ్యం ఎక్కువ అని చెప్పొచ్చు. సగటుతో పాటు 'నిలకడ'ను కూడా పరిశీలిద్దాం.

'X' విచలన గుణకం:

ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

రాశులు (x_i)	విచలనాలు $(x_i - \bar{x})$	విచలనాల వర్గాలు $(x_i - \bar{x})^2$
75	23.84	568.3456
21	−31.16	970.9456
65	13.84	191.5456
60	8.84	78.1456
45	−6.16	37.9456
41	−10.16	103.2256
	మొత్తం =	1950.1536

$\therefore$ ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{1950.1536}{6}}$$

$$= \sqrt{325.0256}$$

$$= 18.028$$

విచలన గుణకం =

$$\frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{సగటు}} \times 100$$

$\therefore$ 'X' విచలన గుణకం = $\frac{18.028}{51.16} \times 100$

$$= 35.23931 \rightarrow (1)$$

'Y' విచలన గుణకం

రాశులు (y_i)	విచలనాలు $(y_i - \bar{y})$	విచలనాల వర్గాలు $(y_i - \bar{y})^2$
68	3.17	10.0489

44	-24.83	616.5289
75	10.17	103.4289
68	3.17	10.0489
63	-1.83	3.3489
71	6.17	38.0689
	మొత్తం =	781.4734

∴ ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{781.4734}{6}}$$

$$= \sqrt{130.2455}$$

$$= 11.4125$$

'Y' విచలన గుణకం = $\frac{11.4125}{64.83} \times 100$

$= 17.60376 \rightarrow (2)$

(1) & (2) ల నుంచి 'X' కంటే 'Y' విచలన గుణకం తక్కువ కాబట్టి 'X' కంటే 'Y' అనే ఆటగాడిలో నిలకడ ఎక్కువ. కాబట్టి సగటు రీత్యా, నిలకడ రీత్యా 'X' కంటే 'Y' మెరుగ్గా ఉన్నాడు.

∴ 'X' 'కంటే 'Y సామర్థ్యం ఎక్కువ.

గమనిక:

నిజానికి ఈ ప్రశ్నలో విచలన గుణకాలు కనుక్కోవాల్సిన అవసరం లేదు. 'X' కంటే 'Y' సగటు ఎక్కువ కాబట్టి 'Y' సామర్థ్యం ఎక్కువ అని చెప్పొచ్చు. ఇద్దరి సగటులు సమానం అయినప్పుడు మాత్రమే ఇద్దరిలో ఎక్కువ నిలకడగా ఆడేది ఎవరు అన్న దానిని పరిగణనలోకి తీసుకొంటాం.

ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం: (combined S.D)

మొదటి గ్రూపు :

రాశుల సంఖ్య = N_1, సగటు = X_1

ప్రామాణిక విచలనం = σ_1

రెండో గ్రూపు:

రాశుల సంఖ్య N_2, సగటు = X_2

ప్రామాణిక విచలనం = σ_2

రెండు గ్రూపుల ఉమ్మడి సగటు = X,

ప్రామాణిక విచలనం = σ అనుకొంటే

$X - X_1 = d_1$,

$X - X_2 = d_2$

అప్పుడు

$$\sigma^2 = \frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}$$

లేదా

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఉమ్మడి విస్తృతిని కూడా కనుక్కోవచ్చు.

2. 60 రాశుల సగటు, విస్తృతులు వరుసగా 10, 4. ఈ 60 రాశుల్లో 40 రాశుల సగటు, విస్తృతులు వరుసగా 11, 2.25. అయితే మిగిలిన 20 రాశుల సగటు, విస్తృతులను కనుక్కోండి?

(Civil Services, Mains – 2003)

సమాధానం:

దత్తాంశం ప్రకారం

$N_1 = 40,\ X_1 = 11, \sigma_1^2 = 2.25$

$X = 10, \sigma^2 = 4.$

మిగిలిన 20 రాశుల సగటు, విస్తృతులను వరుసగా X_2, σ_2^2 అనుకొంటే అప్పుడు $N_2 = 20.$

ఉమ్మడి సగటు $X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$ అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$10 = \frac{40 \times 11 + 20X_2}{40 + 20}$$

$\Rightarrow 10 \times 60 = 440 + 20X_2$

$\Rightarrow 20X_2 = 600 - 440 = 160$

$\Rightarrow X_2 = \frac{160}{20} = 8$

$\therefore$ మిగిలిన 20 రాశుల సగటు = 8.

అదేవిధంగా

$$\sigma^2 = \frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}$$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి,

$d_1 = X_1 - X = 11 - 10 = 1,$

$d_2 = X_2 - X = 8 - 10 = -2$

ఇప్పుడు పై సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$4 = \frac{40(2.25 + 1) + 20(\sigma_2^2 + 4)}{40 + 20}$$

$\Rightarrow 4 \times 60 = 130 + 20\sigma_2^2 + 80$

$\Rightarrow 240 = 210 + 20\sigma_2^2$

$\Rightarrow 20\sigma_2^2 = 240 - 210 = 30$

$$\Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{30}{20} = 1.5$$

$\therefore$ మిగిలిన 20 రాశుల విస్తృతి = 1.5

పౌనఃపున్య విభాజనానికి ప్రామాణిక విచలనం కనుగొనటం:

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనలో తరగతుల మధ్య విలువలు వరుసగా $m_1, m_2, ...m_n$, తరగతుల పౌనఃపున్యాలు వరుసగా $f_1, f_2, ...f_n$,
అనుకుంటే, ఆ పౌనఃపున్య విభాజనం సగటు $\bar{x}$ అనుకుంటే

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}$$

ప్రామాణిక విచలనం

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

అలాగే ఆ పౌనఃపున్య విభాజనం విస్తృతిని కూడా కనుక్కోవచ్చు.

3. కింది పౌనఃపున్య పట్టిక సగటు, ప్రామాణిక విచలనాలను కనుక్కోండి?

మార్కులు	**విద్యార్థుల సంఖ్య**
5 – 10	2

10 – 15	9
15 – 20	29
20 – 25	54
25 – 30	6
మొత్తం	100

సమాధానం:

సగటు $\bar{x} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{2\times 7.5 + 9\times 12.5 + 29\times 17.5 + 54\times 22.5 + 6\times 27.5}{100}$$

$$= \frac{15 + 112.5 + 507.5 + 1215 + 165}{100}$$

$$= \frac{2015}{100} = 20.15$$

ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 160 + 9\times 58.5 + 29\times 7 + 54\times 5.5 + 6\times 54}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{320 + 527 + 204 + 298 + 324}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{1673}{100}} = \sqrt{16.73} = 4.09$$

∴ ఇచ్చిన పౌనఃపున్య పట్టిక సగటు = 20.15

ప్రామాణిక విచలనం = 4.09

అలాగే ఈ పౌనఃపున్య పట్టిక విచలన గుణకాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

విచలన గుణకం = $\frac{4.09}{20.15} \times 100$

$= 20.2977$

పౌనఃపున్య విభాజనం మాధ్యమ విచలనం:

మాధ్యమ విచలనం = $\frac{\sum f_i \left(\left| m_i - \bar{x} \right| \right)}{\sum f_i}$

పై ఉదాహరణలోని పౌనఃపున్య విభాజనం మాధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొందాం.

మాధ్యమ విచలనం =

$$\frac{2\left|-12.65\right| + 9\left|-7.65\right| + 29\left|-2.65\right| + 54\left|2.35\right| + 6\left|7.35\right|}{100}$$

$$= \frac{25.3 + 68.85 + 76.85 + 126.9 + 44.1}{100}$$

$= 3.42$