సాంఖ్యక శాస్త్రం-3

పౌనఃపున్య విభాజనానికి మధ్యగతం

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనంలో పౌనఃపున్యాల మొత్తం 'N' అయితే మొదట N/2 విలువను లెక్కించాలి. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం నుంచి N/2వ రాశి ఏ తరగతిలో ఉందో ఆ తరగతిని ''మధ్యగత తరగతి'' అని అంటాం. ఈ విధంగా మొదట ''మధ్యగత తరగతి''ని గుర్తించాలి.

ఆ తర్వాత కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

మధ్యగతం $(M) = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f} \times C$

$L \rightarrow$ మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి.

$N \rightarrow$ పౌనఃపున్యాల మొత్తం.

$F \rightarrow$ మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం.

$f \rightarrow$ మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యం.

$C \rightarrow$ తరగతి అంతరం.

ఉదాహరణ:

కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి?

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం
0–20	9
20–40	16
40–60	24
60–80	15
80–100	4
100–120	2
మొత్తం	N = 70

సమాధానం:

దత్తాంశం నుంచి పౌనఃపున్యాల మొత్తం

N = 70.

$\frac{N}{2} = \frac{70}{2} = 35.$

కాబట్టి ''35''వ రాశి ఉండే తరగతి మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

కింది పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయాలి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	ఆరోహణా సంచిత పౌనఃపున్యం
0–20	9	9
20–40	16	25
*40–60	24	49
60–80	15	64
80–100	4	68
100–120	2	70
మొత్తం	N = 70	

పై పట్టిక నుంచి '35'వ రాశి 40–60 తరగతిలో ఉంది. కాబట్టి ఇది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

$\therefore L = 40 - 60$ తరగతి దిగువ అవధి $= 40,$

$N = 70,$

$F = 25,$

$f = 24$

$C = 20.$

మధ్యగతం =

$$L + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f} \times C$$

$$= 40 + \frac{\left(\frac{70}{2} - 25\right)}{24} \times 20$$

$$= 40 + \frac{10 \times 20}{24} = 48.3$$

$\therefore$ ఇచ్చిన దత్తాంశం మధ్యగతం = 48.3

బాహుళకం (Mode)

ఏదైనా ఒక దత్తాంశంలో తరచుగా వచ్చే రాశిని ''బాహుళకం'' అని అంటారు. లేదా దత్తాంశంలో అన్నింటికంటే ఎక్కువ పౌనఃపున్యం ఉన్న అంశాన్ని బాహుళకం అని అంటారు.

ధర్మాలు:

1. దత్తాంశానికి బాహుళకం ఉండొచ్చు లేదా ఉండకపోవచ్చు.

2. ఒక దత్తాంశానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ బాహుళకాలు కూడా ఉండొచ్చు.

ఉదాహరణ:

ఎ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 అనే దత్తాంశానికి బాహుళకం లేదు.

బి) 6, 5, 4, 4, 3, 1, 4, 5, 1, 4, 9 అనే దత్తాంశానికి బాహుళకం = ''4''. ఎందుకంటే '4' అనే రాశి ఎక్కువసార్లు పునరావృతమైంది. దత్తాంశానికి ఒకే బాహుళకం ఉంటే దాన్ని ఏక బాహుళకం (Uni–modal) అని అంటారు.

సి) 4, 5, 5, 3, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 7 అనే దత్తాంశానికి బాహుళకాలు = '2', '5'. ఎందుకంటే 2, 5, రెండూ కూడా మూడుసార్లు పునరావృతమయ్యాయి. ఈ విధంగా రెండు బాహుళకాలు ఉంటే దాన్ని ద్విబాహుళకం (Bi-modal) అని అంటారు.

పౌనఃపున్య పట్టికకు బాహుళకం కనుక్కోవడం:

మొదట ఇచ్చిన పౌనఃపున్య పట్టికలో బాహుళక తరగతిని గుర్తించాలి. అత్యధిక పౌనఃపున్యం ఉన్న తరగతిని బాహుళక తరగతి అంటారు.

బాహుళకం = $L+\frac{(f-f_1)}{(2f-f_1-f_2)}\times C$

L – బాహుళక తరగతి దిగువ అవధి.

f – బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం.

f_1 – బాహుళక తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యం.

f_2 – బాహుళక తరగతి తర్వాత తరగతి పౌనఃపున్యం.

C – బాహుళ తరగతి అంతరం.

ముఖ్య గమనిక:

బాహుళక తరగతి మొదటి తరగతి అయితే అప్పుడు $f_1 = 0$. అలాగే బాహుళక తరగతి చివరి తరగతి అయితే అప్పుడు $f_2 = 0$ అవుతుంది. ఒక పౌనఃపున్య పట్టికకు రెండు లేదా ఎక్కువ బాహుళక తరగతులు కూడా ఉండొచ్చు.

ఉదాహరణ:

కింది పౌనఃపున్య పట్టికకు బాహుళకం కనుక్కోండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10–19	10
20–29	22
30–39	24

40–49	30
50–59	10
60–69	4

సమాధానం: దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్య పట్టికలోని తరగతులు విలీన/అంతర్గత పద్ధతిలో ఉన్నాయి. ముందు వీటిని మినహాయింపు/బహిర్గత పద్ధతి లోకి మార్చి రాస్తే కింది పౌనఃపున్య విభాజనం నిర్మితమవుతుంది.

మార్కులు	**విద్యార్థుల సంఖ్య**
9.5–19.5	10
19.5–29.5	22
29.5–39.5	24
39.5–49.5	30
49.5–59.5	10
59.5–69.5	4
మొత్తం	**100**

పై పట్టిక నుంచి అత్యధిక పౌనఃపున్యం (30) 39.5–49.5 అనే తరగతిలో ఉంది. కాబట్టి ఇది బాహుళక తరగతి అవుతుంది. ఇప్పుడు

బాహుళకం = $L + \frac{(f - f_1)}{(2f - f_1 - f_2)} \times C$

పై పట్టిక నుంచి

$L = 39.5, \quad f = 30$

$f_1 = 24, f_2 = 10, C = 10$

∴ బాహుళకం =

$$39.5 + \frac{(30 - 24)}{(2 \times 30 - 24 - 10)} \times 10$$

$$= 39.5 + \frac{6 \times 10}{26}$$

$$= 39.5 + \frac{30}{13} = 39.5 + 2.3 = 41.8$$

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశం బాహుళకం = 41.8

వివరణ: బాహుళకం అంటే బహుళ ఆదరణ పొందిన రాశి అని అర్థం. అంటే పై ఉదాహరణలో మొత్తం 100 మంది విద్యార్థుల్లో ఎక్కువ మంది మార్కులు 41.8 వద్ద కేంద్రీకృతమై ఉన్నాయని అర్థం. (Point

of concentration).

ఉదాహరణ:

కింది దత్తాంశానికి బాహుళకాలను కనుక్కోండి

నెల ఆదాయం (రూ.లలో)	కుటుంబాల సంఖ్య
2000 కంటే తక్కువ	2
4000 కంటే తక్కువ	32
6000 కంటే తక్కువ	42
8000 కంటే తక్కువ	49
10,000 కంటే తక్కువ	60
12,000 కంటే తక్కువ	90
14,000 కంటే తక్కువ	100

సమాధానం: దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్య పట్టికను మినహాయింపు లేదా బహిర్గత పద్ధతిలో తరగతు లను తీసుకొని పునర్నిర్మిస్తే

నెల ఆదాయం (రూ.లలో)	కుటుంబాల సంఖ్య
0 – 2,000	2
2,000 – 4,000	32–2 = 30
4,000 – 6,000	42–32 = 10
6,000 – 8,000	49–42 = 7
8,000 – 10,000	60–49 = 11
10,000 – 12,000	90–60 = 30
12,000 – 14,000	100–90 = 10
మొత్తం	100

ఈ పౌనఃపున్య పట్టికలో అత్యధిక పౌనఃపున్యం (30) 2,000–4,000, 10,000–12,000 అనే రెండు తరగతుల్లో ఉన్నాయి. కాబట్టి ఈ రెండు తరగతులూ బాహుళక తరగతులవుతాయి.

Case – 1:

2,000–4,000ను బాహుళక తరగతి అనుకొంటే...

బాహుళకం = $L+\frac{(f-f_1)}{(2f-f_1-f_2)}\times C$

L = 2,000,

$f = 30, \quad f_1 = 2, \quad f_2 = 10, \quad C = 2,000$

∴ బాహుళకం =

$$2,000 + \frac{(30-2)}{(2\times30-2-10)}\times2,000$$

$$= 2,000 + \frac{28\times2,000}{48} = 2,000 + \frac{14,000}{12}$$

= 2,000 + 1,166.66 = 3,166.66

∴ బాహుళకం = రూ. 3,166.66

Case – 2:

10,000 – 12,000ను బాహుళక తరగతిగా తీసుకుంటే...

$L = 10,000, \quad f = 30,$

$f_1 = 11, \quad f_2 = 10, C = 2,000$

∴ బాహుళకం =

$$= 10,000 + \frac{(30-11)}{(2\times30-11-10)}\times2,000$$

$$= 10,000 + \frac{19\times2,000}{39} = 10,000 + \frac{38,000}{39}$$

$= 10,000 + 976.15 = 10,976.15$

∴ బాహుళకం = రూ. 10,976.15

జకాబట్టి ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనానికి రెండు బాహుళకాలు ఉన్నాయని చెప్పొచ్చు. అవి రూ. 3,166.66, రూ. 10,976.15.